VOLUME 2 (1956/57) No. 5

NUCLEAR PHYSICS

MONTHLY JOURNAL DEVOTED TO THE EXPERIMENTAL AND THEORETICAL STUDY OF ATOMIC NUCLEI, NUCLEAR FIELDS AND THE FUNDAMENTAL ASPECTS OF COSMIC RADIATION

EDITOR: L. ROSENFELD - MANCHESTER

R. S. NATAF, Sur les mouvements collectifs de rotation des noyaux 497

J. M. HANSTEEN and S. MESSELT, Characteristic X-rays produced by protons of 0.2 to 1.6 MeV energy 526

R. THIEBERGER, Calculations in nuclear spectroscopy with the harmonic oscillator shell model 533

O. NATHAN and M. A. WAGGONER, Decay of Eu^{152} and Eu^{152m} 548

I. I. GUREVICH and M. I. PEVSNER, Repulsion of nuclear levels. 575

P. T. MATTHEWS and A. SALAM, The coupling constants of strong interactions. 582

J. S. BELL, R. J. EDEN and T. H. R. SKYRME, Magnetic moments of nuclei and the nuclear many-body problem 586

J. BEYDON, R. CHAMINADE, M. CRUT, H. FARAGGI, J. OLKOWSKY et A. PAPINEAU, Étude de la transmutation du cuivre par l'azote et l'oxygène 593

(continued on p. 3 of cover)

NORTH - HOLLAND PUBLISHING COMPANY - AMSTERDAM

January 1957

EDITORIAL BOARD

AUSTRIA:	B. Karlik (Vienna), H. Thirring (Vienna)
BELGIUM:	M. de Hemptinne (Louvain), J. Verhaeghe (Ghent)
CANADA:	G. Volkoff (Vancouver)
DENMARK:	C. Møller (Copenhagen), S. Rozental (Copenhagen)
EGYPT & ARAB COUNTRIES:	F. El Bedewi (Alexandria), M. G. Nooh (Cairo)
FINLAND:	L. Simons (Helsinki)
FRANCE:	A. Berthelot (Saclay), S. Gorodetzky (Strasbourg), F. Joliot (Paris)
GERMANY (FED. REP.):	W. Gentner (Freiburg i. B.), J. H. D. Jensen (Heidelberg)
GERMANY (DEM. REP.):	G. Hertz (Leipzig)
GREAT BRITAIN:	S. Devons (Manchester)
HUNGARY:	L. Janossy (Budapest)
INDIA:	H. Bhabha (Bombay), B. Peters (Bombay), R. Ramanna (Trombay)
IRISH REPUBLIC:	J. McConnell (Maynooth)
ISRAEL:	G. Racah (Jerusalem)
ITALY:	E. Amaldi (Rome)
JAPAN:	S. Kikuchi (Tokyo), S. Tomonaga (Tokyo)
NETHERLANDS:	H. Brinkman (Groningen), S. R. de Groot (Leiden)
NORWAY:	E. Hylleraas (Oslo), A. Lundby (Oslo), H. Wergeland (Trondheim)
POLAND:	L. Infeld (Warsaw)
PORTUGAL:	J. M. Araújo (Porto), J. R. de Almeida Santos (Coimbra)
SOUTH AMERICA:	G. Beck (Saõ Paulo), J. Leite Lopes (Rio de Janeiro)
SPAIN:	J. M. Otero (Madrid), C. Sanchez del Rio (Madrid)
SWEDEN:	O. Klein (Stockholm), K. Siegbahn (Uppsala), I. Waller (Uppsala)
SWITZERLAND:	P. Huber (Basel), P. Scherrer (Zürich)
U.S.S.R.:	M. A. Markov (Moscow), I. S. Shapiro (Moscow), D. V. Skobeltzyn (Moscow)
YUGOSLAVIA:	I. Supek (Zagreb)
U.S.A. & MEXICO:	V. Weisskopf (Cambridge, Mass.)
AUSTRALIA & NEW ZEALAND:	H. Messel (Sydney), M. L. Oliphant (Canberra)

CONTRIBUTIONS may be sent to the Editor, Professor L. Rosenfeld, Dept. of Theoretical Physics, The University, Manchester, either directly, or preferably through the intermediary of one of the members of the Editorial Board of the country or region in which the author is working. They may be written in English, French or German.

BOOKS FOR REVIEW should be sent to Professor Rosenfeld.

NUCLEAR PHYSICS is published in monthly issues. The subscription price of a volume of 700 pages is fl 57.00; 114s; $ 15.00. Postfree.

SUBSCRIPTIONS should be sent to the publishers, NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY, P.O.Box 103, Amsterdam or to any subscription-agent. Subscriptions for U.S.A. are to be sent exclusively to INTERSCIENCE PUBLISHERS, INC., 250 Fifth Avenue, New York 1, N.Y.

Printed in the Netherlands.

Nuclear Physics **2** (1956/57) 497—525; *North-Holland Publishing Co., Amsterdam*

SUR LES MOUVEMENTS COLLECTIFS DE ROTATION DES NOYAUX

R. S. NATAF

Tait Institute of Mathematical Physics, University of Edinburgh †

Reçu le 20 juin 1956

Abstract: A. Bohr and B. R. Mottelson have forecast the rotational nuclear levels by their unified model [1, 2]) in which collective motions (liquid drop) and individual motions (shell model) are taken together and coupled. Attempts had been made [3]) to derive this compound Hamiltonian from the Schrödinger one for the nucleus, by a method in which the collective variables are expressed in terms of the *coordinates* of the nucleons — and then taken as redundant variables.

We derive from symmetry (indiscernibility of nucleons) and rotation invariance requirements the possible expressions, which contain as the simplest ones those given by A. Bohr [3]).

We study these coordinate transformations and find that they do not lead to the well known rotational levels (a result we had already given in ref. [4])).

1. Introduction

1.1 LE MODÈLE DE BOHR-MOTTELSON

La théorie de Bohr-Mottelson a été élaborée pour expliquer certains caractères des noyaux atomiques qui sont en contradiction avec les prévisions du modèle en couches.

1) Grands moments quadrupolaires pour les noyaux dont les nombres de neutrons et protons s'écartent beaucoup des nombres „magiques".

D'après le modèle en couches, le moment quadrupolaire Q provient essentiellement du proton célibataire

$$Q_p \equiv e\langle 3z^2-r^2\rangle_{m=j} = -\frac{2j-1}{2(j+1)}\, e\langle r^2\rangle$$

et l'on a $|Q| \approx eR^2$, R étant le rayon du noyau, e la charge élémentaire. Pour les noyaux ayant un grand nombre de nucléons

† L'auteur se trouvait en congé du laboratoire de Physique et Chimie Nucléaires, Collège de France, Paris.

sur des couches incomplètes, la valeur expérimentale peut être 20 fois plus élevée.

2) Mélange de multipôles E2 et M1 pour certaines transitions γ. Pour toute transition entre niveaux résultant d'états individuels, les éléments de matrice de ces radiations multipolaires sont † $M1 \approx (v/c)E1$ et $E2 \approx (R/\lambda_\gamma)E1$, où $v_{\text{nucléon}}/c \approx 0.175$ d'après $\lambda_{\text{nucléon}} \approx r_0$, si $r_0 = 1.20 \times 10^{-13}$ cm et $R/\lambda_\gamma = 3.11 \times 10^{-3} A^{1/3}$ pour $W_\gamma = 511$ keV. Donc $E2 \ll M1$ pour les énergies usuelles des γ observés, et l'on devrait observer M1 seul pour les transitions $\Delta J = 1$, non. En fait la mesure des coefficients de conversion α_K, α_L, α_K/α_L indique, dans de nombreux cas, un mélange M1+E2 que l'on n'observe jamais pour les multipôles Ml, E(l+1) d'ordre plus élevé.

Ces faits s'expliquent en admettant que les noyaux n'ont pas une forme globale sphérique [5]) et il en résulte, comme on va le voir, la possibilité des mouvements collectifs de rotation.

La théorie de Bohr-Mottelson a donné une dynamique de ces mouvements collectifs et permis de prévoir

1) l'existence de niveaux de rotation de la forme

$$E = -\frac{\hbar^2}{2\mathscr{I}}[I(I+1) - I_0(I_0+1)]$$

avec en général $I = I_0, I_0+1, \ldots$ et dans le cas spécial des noyaux pairs $I_0 = 0$ et $I = 0, 2, 4, \ldots$;

2) le fait que ces niveaux de rotation s'obtiennent sélectivement par excitation Coulombienne, provoquée par des particules chargées ayant une énergie insuffisante pour pénétrer dans le noyau.

Le premier cas particulièrement bien étudié expérimentalement a été celui de $^{181}_{73}$Ta [6]).

1.2. LE MODÈLE DE RAINWATER

Rainwater considère un nucléon célibataire interagissant avec une sorte de pellicule de masse négligeable enveloppant le noyau, qui représente l'action de la tension superficielle de la goutte nucléaire.

L'état le plus stable du noyau en présence de cet extra-nucléon ne correspond plus à une forme sphérique mais ellipsoïdale, la déformation étant due à l'action exercée par ce nucléon.

† Cf. Blatt et Weisskopf, Theoretical Nuclear Physics, XII, 6.

APPEAL TO CONTRIBUTORS

Among the factors delaying the appearence of a paper, the most serious is the unsatisfactory presentation of the typescript. An appeal is made to contributors to follow the simple rules and conventions laid down in the instruction sheet which has already been widely distributed and copies of which are available on request from the publishers or the members of the Editorial Board. Attention is called in particular to the writing of formulae. Authors are especially requested *not* to typewrite formulae, but to write them in long hand, very carefully, since the compositor cannot guess the meaning of a symbol which is not legible. In future, the Editor will be forced to return unsatisfactory typescripts to the authors for the necessary material improvements.

It frequently happens that after a paper has been communicated, the author sends substantial corrections or alterations. Since the publisher and printer spare no effort to achieve prompt publication, such late alterations often arrive after the paper has already been set, and inflict on them much unnecessary trouble and cost. Contributors should realise that a too hasty writing-up of a paper thus defeats the prospect of a quick publication.

Editor and publisher trust that the authors will not shun the slight trouble which the careful preparation of the typescript entails and thank them in advance for their cooperation.

Alors, celui-ci ne se meut plus dans un potentiel sphérique $V(r)$ seulement; il s'y superpose un potentiel ellipsoïdal †

$$H_{\text{int}} \equiv -k(r)\, b_{\mu\nu} \frac{x_\mu x_\nu}{r^2} \tag{1}$$

où, avec une convention de sommation sur les indices répétés,

$$b_{\mu\nu} x_\mu x_\nu \equiv \sum_{\mu\nu} b_{\mu\nu} x_\mu x_\nu \equiv b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + b_{12}xy + b_{23}yz + b_{31}zx,$$

les coordonnées Cartésiennes étant désignées soit par x, y, z soit par x_μ avec $\mu = 1, 2, 3$.

La valeur du potentiel dépend de la sphère, de centre O, sur laquelle se trouve le nucléon, et aussi de l'ellipsoïde $b_{\mu\nu} x_\mu x_\nu = \text{Cte}$, membre d'une famille d'ellipsoïdes homothétiques centrés sur O, sur lequel il se trouve.

Les $b_{\mu\nu}$ sont les composantes d'un tenseur symétrique dont la trace est $b \equiv b_{11} + b_{22} + b_{33}$, et l'on peut écrire aussi

$$H_{\text{int}} = -k(r) \left[\sum_\mu \alpha_\mu Y_2^\mu(\theta\varphi) + \tfrac{1}{3} b \right] \tag{2}$$

avec la condition de réalité $\alpha_\mu^* = (-1)^\mu \alpha_{-\mu}$. Le terme $-\frac{1}{3} bk(r)$ peut alors être inclus dans $V(r)$.

Rappelons que

$$\begin{aligned} r^2 Y_2^0(\theta\varphi) &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3z^2 - r^2) \\ r^2 Y_2^{\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} z(x \pm iy) \\ r^2 Y_2^{\pm 2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} (x \pm iy)^2. \end{aligned} \tag{2bis}$$

Pratiquement, les $b_{\mu\nu}$ ou α_μ sont souvent petits devant 1.

Rainwater avait considéré des ellipsoïdes de révolution autour de Oz; $\alpha_\mu Y_2^\mu(\theta\varphi)$ se réduit alors à $\alpha_0 Y_2^0 \equiv \pm \beta Y_2^0$. Il avait déterminé la valeur de β correspondant à la forme d'équilibre du noyau par la condition que soit minimum l'Hamiltonien total

$$H = T_{\text{p}} + V_{\text{p}}(r) + V_{\text{s}} + H_{\text{int}},$$

où $V_{\text{s}} = -\frac{1}{2} C\beta^2$ correspond à l'accroissement d'énergie poten-

† Rainwater prend $k(r) \approx \delta(r - R)$ pratiquement.

tielle quand on passe de la forme sphérique à la forme ellipsoïdale;

$$C = C_{\text{surface}} + C_{\text{coulomb}} = 4R^2O - \frac{3}{10\pi}\frac{Z^2e^2}{R}.$$

En tirant la valeur de O de la formule semi-empirique de Weiszäcker, on trouve $C \approx 60$ MeV pour les noyaux moyens et lourds.

Si $\beta \ll 1$, on peut traiter H_{int} comme une perturbation c'est à dire le remplacer par sa valeur moyenne dans l'état propre † $|nljm\rangle$ de $T_p+V_p(r)$

$$\langle nljm|H_{\text{int}}|nljm\rangle = -\langle n|k(r)|n\rangle\,\beta\cos\gamma\,\langle ljm|Y_2^0|ljm\rangle \equiv -h\beta\cos\gamma,$$

avec

$$h \equiv \langle k(r)\rangle \cdot \langle Y_2^0\rangle = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\langle k\rangle\frac{j(j+1)-3m^2}{4j(j+1)}$$

et $\gamma = 0$ ou π.

Si $U(\mathbf{x}) = V(r)+H_{\text{int}}$ résulte de $V(r)$ par une déformation linéaire on a [3]) $\langle k\rangle = 2\langle T_p\rangle \approx 40$ MeV, comme on le verra au § 3.

Les valeurs des déformations $\beta_0 = h/C$ ainsi obtenues conduisent en général à des valeurs du bon ordre de grandeur pour le moment quadrupolaire, loin des couches fermées,

$$Q_0 = \frac{3}{\sqrt{5\pi}}ZR^2\beta_0\cos\gamma_0$$

$$\text{avec} \begin{cases} \gamma_0 = 0 \text{ si } j(j+1) > 3m^2 \\ \gamma_0 = \pi \text{ si } j(j+1) < 3m^2 \end{cases}$$

pour une répartition uniforme des charges.

A l'approche des noyaux magiques, il faut supposer que C a une valeur beaucoup plus élevée que la valeur moyenne correspondant à la formule de Weiszäcker: ces noyaux sont très peu déformables, et par suite la valeur de β_0 y est très faible.

Dans le cas général où les ellipsoïdes ne sont pas de révolution mais où les axes de coordonnées sont leurs axes de symétrie, on a

$$H_{\text{int}} = -k[a_0Y_2^0+a_2(Y_2^2+Y_2^{-2})], \qquad (3)$$

les a_μ, tels que $a_1 = a_{-1} = 0$ et $a_2 = a_{-2}$, étant les α_μ dans ce système particulier. On pose en général [1, 2])

† n est le nombre quantique radial.

$$a_0 = \beta \cos \gamma, \qquad a_2 = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sin \gamma. \tag{4}$$

D'une manière plus concrète, on peut rattacher les paramètres β, γ à la forme des ellipsoïdes, en particulier, celui qui définit la surface du noyau a des demi-axes de longueur $R(1+\varepsilon_\varkappa)$, avec

$$\varepsilon_\varkappa = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos\left(\gamma - \varkappa \frac{2\pi}{3}\right) \qquad (\varkappa = 1, 2, 3). \tag{5}$$

Pour traiter d'une manière cohérente l'ensemble du noyau, il faudrait, les nucléons étant indiscernables, qu'ils soient tous placés dans le potentiel $U(\mathbf{x})$. Dans ce cas seulement, on pourrait construire une fonction d'onde antisymétrique.

Mais, si U est un potentiel extérieur, ceci n'est pas compatible avec l'invariance de l'Hamiltonien par rotation: car alors une rotation d'ensemble effectuée sur tous les nucléons changerait l'énergie du noyau, ce qui est incompatible avec son caractère de système fermé.

En d'autres termes, le moment angulaire total $\mathbf{J}$ ne serait pas une constante du mouvement; seul $J_z = M$ le serait s'il y a symétrie cylindrique autour de Oz, et non $\mathbf{J}^2$.

En fait, $\sum_{s=1}^{A} U(\mathbf{x}_s)$ doit être un potentiel moyen produit par l'ensemble des nucléons et *suivre* leur rotation collective. On est ainsi conduit à la notion d'une *rotation collective* définie par la position du système de coordonnées intrinsèques $Ox'y'z'$ par rapport à $Oxyz$ „fixe" et d'un *mouvement intrinsèque* des nucléons par rapport à $Ox'y'z'$. Alors

$$\mathbf{I}_{\text{total}} = \mathbf{R}_{\text{coll}} + \mathbf{J}_{\text{intrins}} \tag{6}$$

est bien une constante du mouvement.

Le problème est alors de passer de la description statique de la „surface" nucléaire à une description dynamique.

1.3. LE MODÈLE DE BOHR ET MOTTELSON ET SES DIFFICULTÉS

Bohr et Mottelson [1, 2]) distinguent dans le noyau déformable un petit nombre d'extra-nucléons. Les mouvements de ceux-ci sont décrits de la manière habituelle, en prenant leurs coordonnées comme variables dynamiques, tandis que la déformation du noyau est décrite à l'aide de variables collectives, et comparée à celle d'une goutte liquide. Leur théorie en résulte alors en considérant

les mouvements irrotationnels du „deuxième ordre" de cette goutte incompressible, couplés à ceux des extra-nucléons par H_{int}.

Les déplacements $\boldsymbol{\delta}$ en chaque point $\mathbf{x}$ de la goutte forment un champ vectoriel au sens classique, et l'approximation faite (mouvements du 2ème ordre) consiste à admettre que les

$$\delta_\mu = b_{\mu\nu} x_\nu \tag{7}$$

sont des fonctions linéaires des coordonnées x_ν (on peut considérer la forme homogène (7) au lieu de $\delta_\mu = c_\mu + b_{\mu\nu} x_\nu$ plus générale, le terme c_μ correspondant à une translation d'ensemble).

Soit alors $\chi \equiv x_\mu \delta_\mu = b_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$; en supposant les $|\delta_\mu| \ll |x_\mu|$, $\chi = \frac{1}{2}\delta(r^2)$, et la distance r d'un point $\mathbf{x}$ au centre de coordonnées est changée en

$$r' = r + \delta r = r\left(1 + b_{\mu\nu}\frac{x_\mu x_\nu}{r^2}\right).$$

Si l'on admet une déformation correspondant à $\boldsymbol{\delta}$ pour le potentiel central moyen $V(r)$ ou se trouve chaque nucléon, c'est à dire si le potentiel déformé est $V'(r)$ tel que

$$V'(r') = V(r) = V\left[r'\left(1 + b_{\mu\nu}\frac{x_\mu x_\nu}{r^2}\right)^{-1}\right] \approx V\left[r'\left(1 - b_{\mu\nu}\frac{x_\mu x_\nu}{r^2}\right)\right]$$

on trouve le potentiel $U(\mathbf{x}_p) = V'(r_p)$, d'où

$$k(r_p) = r_p \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r_p}, \tag{8}$$

et $\langle k(r_p)\rangle = 2\langle T_p\rangle$ d'après le théorème du viriel.

En général, la forme (7) dépend des neuf paramètres $b_{\mu\nu}$, mais on remarque que

a) si $b_{\mu\nu}$ est un tenseur antisymétrique, $\chi \equiv 0$ et le champ de déplacements correspond à une rotation d'ensemble, $\delta(r^2) = 0$;

b) si $b_{\mu\nu}$ est symétrique, $\delta_\mu = \partial\chi/\partial x_\mu$ dérive d'un potentiel: le champ δ_μ est irrotationnel, ce qui est l'hypothèse de Bohr-Mottelson.

Cependant ce modèle „unifié" présente des difficultés fondamentales:

1) Il faut considérer à part certains extra-nucléons, ce qui est en contradiction avec l'indiscernabilité des nucléons.

2) La description hydrodynamique quantifiée de l'ensemble des nucléons ne peut être complètement justifiée: elle pose le problème du fondement de l'hydrodynamique quantique.

D'ailleurs, on ne voit pas comment cette description est compatible avec l'existence de couches, c'est à dire d'états individuels dans le noyau, qui se traduit en particulier par la variation de C avec le remplissage des couches.

A celles-ci s'ajoutent d'autres difficultés dans le traitement détaillé de l'Hamiltonien unifié. La principale est la séparation des mouvements collectifs de rotation et de vibration. On a ici

$$H = T_p + V_p(r) + \underbrace{V_s + H_{int} + T_{rot}(\beta, \gamma)}_{W(\beta, \gamma)} + T_{vib}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}, \frac{\partial}{\partial\gamma}\right)$$

et l'on néglige T_{vib} en première approximation (adiabatique).

On minimise $W(\beta, \gamma)$, comme $V_s + H_{int}$ au § 1.2, ce qui conduit à une forme d'équilibre relatif $\gamma = \gamma_1$ ($= 0$ ou π), $\beta = \beta_1$. Alors †

$$T_{rot} = \frac{\hbar^2}{2\mathscr{I}}[(I_1 - J_1)^2 + (I_2 - J_2)^2]$$

avec

$$\mathscr{I} = 3B\beta_1^2, \qquad B = \frac{3AmR^2}{8\pi}. \tag{9}$$

Ce traitement est justifié si l'énergie de vibration au point zéro $E_\beta + E_\gamma$ est $\ll W(\beta\gamma)$. Pour les valeurs considérées de $\langle k \rangle$ et C, on trouve en fait $E_\beta + E_\gamma \geqq |W(\beta\gamma)|$ (cf. ref. [7])) ou $\overline{(\beta - \beta_1)^2}/\beta_1^2 \approx 1$ au lieu de $\ll 1$ (cf. ref. [1, 2])).

On peut évidemment modifier la valeur de C pour que le rapport $\overline{(\beta - \beta_1)^2}/\beta_1^2 \ll 1$, mais alors les valeurs de β_1 obtenues sont beaucoup plus grandes que les valeurs observées (il faut que $\beta_1 \approx 1$ pour que ce rapport soit 0.1).

Enfin si β_1 est tiré de la valeur expérimentale du moment quadrupolaire:

$$Q = \frac{I_0(2I_0 - 1)}{(I_0 + 1)(2I_0 + 3)} Q_0(\beta_1)$$

dans l'état fondamental on trouve que les valeurs de $\mathscr{I}$ données par (9) sont 6 à 10 fois plus petites que les valeurs expérimentales déduites de l'énergie du premier niveau de rotation (cf. ref. [8–11])).

Toutes ces difficultés rendent souhaitable une déduction de l'Hamiltonien unifié à partir des premiers principes.

† I_1, J_1 etc. sont les composantes de **I**, **J** [éq. (6)] sur les axes intrinsèques.

2. Tentative pour Déduire des Premiers Principes l'Hamiltonien du Modèle Unifié

2.1. EXPRESSION DES $b_{\mu\nu}$ (OU α_μ) D'APRÈS LES POSTULATS D'INVARIANCE PAR ROTATION ET DE SYMÉTRIE

Pour que $\sum_{s=1}^{A} U(\mathbf{x}_s)$ ne change pas dans une rotation d'ensemble effectuée sur les coordonnées $\mathbf{x}_s$ de tous les nucléons, il faut que les $b_{\mu\nu}$ se comportent comme les composantes d'un tenseur du 2ème ordre dans cette rotation. *Si l'on admet que ce potentiel dépend seulement des coordonnées des nucléons* les $b_{\mu\nu}$ sont donc des fonctions des $\mathbf{x}_p$ ayant ce caractère tensoriel. A cause de l'indiscernabilité des nucléons, elles doivent être d'ailleurs des fonctions symétriques par rapport à l'échange de deux nucléons, d'où la forme générale

$$b_{\mu\nu} = G' \sum_{pq} f_{pq} x_{p\mu} x_{q\nu} \qquad (G' \text{ constante}) \tag{10}$$

où f_{pq} est une fonction invariante par rotation, symétrique en $p, q : f(r_p, r_q; r_{pq})$ ou $f(r_p, r_q; \mathbf{x}_p \cdot \mathbf{x}_q)$.

La forme la plus simple est celle de A. Bohr [3]):

$$b_{\mu\nu} = G' \sum_{p} x_{p\mu} x_{p\nu}, \tag{11}$$

G' étant une constante de dimension L^{-2}, telle que les $|b_{\mu\nu}| \ll 1$. Avec (11), l'un des ellipsoïdes du § 1.2 est l'ellipsoïde d'inertie puisque toutes les masses sont égales pour les nucléons.

Prenant H_{int} sous la forme $-\sum_s k(r_s)\, \alpha_\mu Y_2^{\mu *}(\omega_s)$ on voit que

$$\alpha_\mu = G \sum_{p} r_p^2 Y_2^\mu(\omega_p), \tag{11 bis}$$

avec une autre constante G (ω désigne les coordonnées angulaires θ, φ).

Les paramètres de la „surface" étant ainsi exprimés en fonction des coordonnées, on a, avec (10),

$$H_{\text{int}} = -G' \sum_{pqs} \frac{k(r_s)}{r_s^2} f_{pq} x_{p\mu} x_{q\nu} x_{s\mu} x_{s\nu},$$

et en particulier avec (11)

$$H_{\text{int}} = -G' \sum_{ps} r_s^{-2} k(r_s) x_{p\mu} x_{p\nu} x_{s\mu} x_{s\nu},$$

de sorte que l'interaction des nucléons avec la surface résulte en fait d'une somme d'interactions entre trois nucléons dans le cas de (10), entre deux nucléons dans le cas de (11). La deuxième forme est plus symétrique et semble plus vraisemblable; elle s'écrit encore, d'après (11bis),

$$H_{\text{int}} = -G \sum_{ps} k(r_s) r_p^2 Y_2^{\mu}(\omega_p) Y_2^{\mu^*}(\omega_s). \qquad (12)$$

Ainsi, l'interaction de Rainwater entre la „surface" et un nucléon s résulterait en fait, dans la tentative actuelle, de l'interaction de s avec tous les autres nucléons p (les termes $s = p$, si on les conserve correspondent à un potentiel central que l'on peut faire entrer dans V_p). L'introduction de H_{int} serait ainsi justifiée par l'existence de certaines forces entre deux nucléons; mais ces forces devraient être de courte portée, semble-t-il. Or, ici, les termes de (12) correspondent à une force de grande portée, en $r_{ps}^2 + r_{ps}^4$ essentiellement. Cependant, cette difficulté ne doit pas conduire à rejeter (12) ou (10) car H_{int} peut être, comme V_p du modèle en couches, un potentiel moyen résultant de certaines compensations des forces à courte portée (pour V_p, ceci apparait dans la théorie de Brueckner par exemple).

2.2. FORMALISME RELATIF AUX VARIABLES SUPPLÉMENTAIRES

On peut alors prendre les six $b_{\mu\nu}$ comme nouvelles variables dynamiques, ou encore les cinq α_μ et la trace b.

On pourrait exprimer les coordonnées de deux des nucléons, $\mathbf{x}_A$ et $\mathbf{x}_{A-1}$ par exemple, en fonction de $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{A-1}$ et des $b_{\mu\nu}$ en utilisant les relations de définition de ceux-ci. Ainsi, la fonction d'onde $\Psi\ (\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_A)$ serait transformée en $\Psi(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{A-2};\ b_{\mu\nu})$ ou $\Psi(\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_{A-2};\ \alpha_\mu,\ b)$, et l'on pourrait effectuer cette transformation de coordonnées sur l'équation de Schrödinger du système $H\Psi = E\Psi$.

Ce procédé dissymétrique, que nous avons principalement exposé dans nos travaux antérieurs [4]) pour abréger la rédaction, n'est pas compatible avec l'indiscernabilité des nucléons — et nous utiliserons une méthode plus symétrique.

Une telle méthode est souvent utilisée dans la séparation du mouvement du centre de gravité, de coordonnées $\boldsymbol{\xi} = (1/M)\sum_{k=1}^{A} m_k \mathbf{X}_k$, $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_A$ étant les coordonnées des A particles du système. Les coordonnées relatives sont les $\mathbf{x}_i = \mathbf{X}_i - \boldsymbol{\xi}$ telles que

$$\sum_{1}^{A} m_i \mathbf{x}_i = 0. \qquad (13)$$

Au lieu de prendre pour nouvelles coordonnées $\boldsymbol{\xi}$ et $\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_{A-1}$ [$\mathbf{x}_A$ en résultant par (13)], on conserve les $3A+3$ coordonnées $\boldsymbol{\xi}$, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_A$ jusqu'au calcul final des éléments de matrice utiles.

On considère alors la fonction d'onde $\Phi(\xi, \mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_A)$, dont $\Psi(\mathbf{X}_1, \ldots \mathbf{X}_A)$ se déduit en y remplaçant les ξ, $\mathbf{x}_i$ en fonction des $\mathbf{X}_k$. Ψ étant solution de $H\Psi = E\Psi$ avec $H \equiv \sum_i (\mathbf{P}_i^2/2m_i) + V(\mathbf{X}_1, \ldots \mathbf{X}_A)$, on trouve que Φ satisfait à

$$\left[\sum \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} - \frac{1}{2M}(\sum_i \mathbf{p}_i)^2 + \frac{\pi^2}{2M} + V\right]\Phi = E\Phi, \tag{13a}$$

les $\mathbf{p}_i$, π étant les moments conjugués des $\mathbf{x}_i$, ξ (les $\mathbf{P}_i$ étant ceux des $\mathbf{X}_i$). Comme V ne dépend en fait que des $\mathbf{x}_i$, l'éq. (13a) se sépare et $\Phi = G(\xi)F(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_A)$, d'où

$$\Psi(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_A) = \int \delta(\xi - \frac{1}{M}\Sigma m_i \mathbf{X}_i) G(\xi) F(\mathbf{X}_1 - \xi, \ldots, \mathbf{X}_A - \xi) \mathrm{d}^3\xi. \tag{14}$$

Les éléments de matrice O_{ba} d'un opérateur O peuvent se calculer directement avec les fonctions d'onde Φ par

$$O_{ba} = \int \Phi_b^* O \Phi_a \delta(\Sigma m_i \mathbf{x}_i) \mathrm{d}^3\xi \mathrm{d}^3 x_1 \ldots \mathrm{d}^3 x_A \tag{15}$$

comme il résulte de (14), une opération $\int \delta(\Sigma m_i \mathbf{x}_i) \mathrm{d}^3\xi'$ étant supprimée.

Si O et $\Sigma m_i \mathbf{x}_i$ commutent, on ne rencontre aucune difficulté pour la définition de l'Hermiticité de O. En particulier l'Hamiltonien de (13a) commute avec $\Sigma m_i \mathbf{x}_i$. Il en résulte que si Φ est solution de (13a), $\delta(\Sigma m_i \mathbf{x}_i)\Phi$ l'est aussi et on peut normer les Φ par

$$\int \Phi_b^* \Phi_a \delta(\Sigma m_i \mathbf{x}_i) \mathrm{d}^3\xi \mathrm{d}^3 x_1 \ldots \mathrm{d}^3 x_A = \delta_{ba}, \tag{16}$$

ce qui lève en fait la dégénérescence indiquée des niveaux d'énergie de H (toutes les fonctions propres $f(\Sigma m_i \mathbf{x}_i)\Phi$, avec f arbitraire, correspondant à la même valeur propre de H). Les fonctions Φ_b, Φ_a sont bien orthogonales avec cette définition, H étant Hermitique avec la définition (15). Enfin, la définition (15) pour les éléments de matrice $H_{ba} = E_a \delta_{ba}$ ne modifie pas alors les valeurs propres E_a obtenues par (13a).

On peut dire aussi que

$$O_{ba} = \int \Phi_b^* O \overline{\Phi}_a \mathrm{d}^3\xi \mathrm{d}^3 x_1 \ldots \mathrm{d}^3 x_A,$$

où $\overline{\Phi}_a = \Phi_a \delta(\sum_i m_i \mathbf{x}_i)$, vérifie les 3 conditions subsidiaires

$$(\Sigma m_i \mathbf{x}_i)\overline{\Phi}_a = 0, \tag{16}$$

tous les éléments de matrice $(\Sigma m_i \mathbf{x}_i)_{ba}$ étant nuls. Il faut noter

toutefois que ces conditions supplémentaires portent seulement sur les vecteurs „ket" $\overline{\Phi}_a$, et non sur les vecteurs „bra" Φ_b^*, avec notre convention (15).

Appliquant la même méthode, nous utiliserons jusqu'aux calculs finaux une fonction $\Phi(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_A; b_{\mu\nu})$ ou $\Phi(\mathbf{x}_1 \ldots, \mathbf{x}_A; \alpha_\mu, b)$ contenant six variables supplémentaires, et vérifiant les six conditions subsidiaires

$$[b_{\mu\nu} - b_{\mu\nu}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_A)]\overline{\Phi} = 0$$

analogues à (16). En fait, il vaut mieux passer immédiatement aux variables intrinsèques $\mathbf{x}'_1, \ldots \mathbf{x}'_A$ telles que

$$b'_{\mu\nu}(\mathbf{x}'_1, \ldots, \mathbf{x}'_A) = 0 \text{ pour } \mu \neq \nu. \tag{17}$$

Si l'on passe du système $Oxyz$ au système de coordonnées intrinsèque $Ox'y'z'$ par les angles d'Euler $\theta_1\theta_2\theta_3$, les 3 relations (17) permettent de calculer $\theta_1\theta_2\theta_3$ en fonction des $\mathbf{x}_k$, et ainsi les $\mathbf{x}'_i$ en fonction des $\mathbf{x}_k$.

On obtient alors $\Phi(\mathbf{x}'_1, \ldots \mathbf{x}'_A; \theta_i, b'_{\mu\mu})$ ou $\Phi(\mathbf{x}'_1, \ldots, \mathbf{x}'_A; \theta_i a_0 a_2 b)$ dépendant toujours de $3A+6$ variables et vérifiant les conditions subsidiaires

$$\begin{aligned} &b'_{\mu\nu}(\mathbf{x}'_1, \ldots, \mathbf{x}'_A)\overline{\Phi} = 0 \text{ pour } \mu \neq \nu, \\ &[b'_{\mu\mu} - b'_{\mu\mu}(\mathbf{x}'_1, \ldots, \mathbf{x}'_A)]\overline{\Phi} = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

En particulier, avec la forme (11) et en utilisant a_0, a_2, b:

$$\begin{aligned} &(\textstyle\sum_p x'_p y'_p)\overline{\Phi} = 0, \text{ etc. par permutation circulaire,} \\ &[a_0 - G\Sigma r'^2_p Y^0_2(\omega'_p)]\overline{\Phi} = 0;\ [a_2 - G\Sigma r'^2_p Y^2_2(\omega'_p)]\overline{\Phi} = 0; \\ &\qquad\qquad [b - G'\Sigma r'^2_p]\overline{\Phi} = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

où $r'_p = r_p$ en fait.

Si $\Psi(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_A)$ est solution de l'équation de Schrödinger usuelle $H\Psi = E\Psi$, on pourra en déduire l'équation $\mathscr{H}\Phi = E\Phi$ à laquelle satisfait Φ. Le Hamiltonien $\mathscr{H}$ doit commuter avec les opérateurs figurant dans les conditions subsidiaires (18) ou (19), ce que nous vérifierons.

On aura alors, comme avec (15), en posant $\gamma_\mu \equiv b'_{\mu\mu}$,

$$\begin{aligned} O_{ba} = \int \Phi_b^* O\Phi_a \delta[b'_{23}(x')]\delta[b'_{31}(x')]\delta[b'_{12}(x')]\delta[\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}(x')] \\ (\mathrm{d}\theta_i)\,\mathrm{d}^3\gamma \mathrm{d}^3 x'_1, \ldots \mathrm{d}^3 x'_A. \end{aligned} \tag{20}$$

La relation de normalisation est obtenue en remplaçant O par 1 et O_{ba} par δ_{ba}. Les éléments de matrice $\mathscr{H}_{ba}$ sont bien alors de la forme $E_a\delta_{ba}$, E_a étant la valeur propre de $\mathscr{H}(\mathbf{x}'; \theta_i; b'_{\mu\mu})$.

Après avoir effectué ce travail, nous avons pris connaissance des articles de Coester [12]), de Lipkin *et al.* [13]) et de Marumori *et al.* [14]) qui utilisent des méthodes analogues.

2.3. TRANSFORMATION DE L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER

Le système intrinsèque est défini par les conditions (17) équivalentes à

$$\begin{aligned} a_1(x') &= a_{-1}(x') = 0 \\ a_2(x') &= a_{-2}(x'). \end{aligned} \tag{17bis}$$

Dans le changement d'axes $Oxyz \to Ox'y'z'$

$$Y_2^\nu(\theta'\varphi') = Y_2^\mu(\theta\varphi)D^2_{\mu\nu}(\theta_i),$$

D^2 étant la matrice unitaire de Wigner, précisée par cette relation; ainsi la relation $a_\nu = \alpha_\mu D^2_{\mu\nu}$ résulte de l'invariance de H_{int} par rotation, quelle que soit la définition exacte des α_μ.

Les θ_i sont alors définis en fonction des α_μ, donc des $x_{p\mu}$, par

$$\begin{aligned} &\alpha_\mu D^2_{\mu\nu}(\theta_i) = 0 \quad \text{pour } \nu = -1, +1, \\ &\alpha_\mu[D^2_{\mu 2}(\theta_i) - D^2_{\mu,-2}(\theta_i)] = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Introduisant les combinaisons $u_{-1} = 2^{-\frac{1}{2}}(x-iy)$, $u_0 = z$, $u_1 = -2^{-\frac{1}{2}}(x+iy)$, les relations

$$u'_{p\nu} = u_{p\mu} D^1_{\mu\nu}(\theta_i) \tag{22}$$

définissent les coordonnées intrinsèques $x'_{p\nu}$ en fonction des $x_{p\mu}$.

Nous pouvons supposer que les $\mathbf{x}_p$ utilisés jusqu'ici sont les coordonnées relatives au centre de masse et que Ψ décrit les mouvements par rapport à ce centre, c'est à dire qu'elle satisfait à (16) et est fonction propre de

$$H \equiv \frac{1}{2m}\sum_i \mathbf{p}_i^2 - \frac{1}{2Am}\left(\sum \mathbf{p}_i\right)^2 + V. \tag{23}$$

D'après (22), (16) entraîne

$$(\textstyle\sum_i m_i \mathbf{x}'_i)\Psi = 0. \tag{16bis}$$

On aura à calculer

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_{p\mu}} = \frac{\partial\Phi}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial\theta_i}{\partial x_{p\mu}} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial a_0}\frac{\partial a_0}{\partial x_{p\mu}} + \frac{\partial\Phi}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_{p\mu}} + \frac{\partial\Phi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x_{p\mu}}\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial x'_{k\nu}}\cdot\frac{\partial x'_{k\nu}}{\partial x_{p\mu}}, \tag{24}$$

puis, en itérant, $\partial^2\Psi/\partial x^2_{p\mu}$ que l'on portera dans l'équation de

Schrödinger $(H-E)\Psi = 0$, obtenant ainsi l'équation à laquelle satisfait Φ.

Pour le potentiel V, on pourra admettre la forme

$$V = \Sigma_{k=1}^{A} U(\mathbf{x}_k) + v,$$

le premier terme correspondant aux potentiels moyens central et H_{int}, tandis que v contient le couplage spin-orbite et les interactions résiduelles entre nucléons:

$$v = \sum_r \xi(r_p)\,\mathbf{l}_p\,\mathbf{s}_p + \sum_{p\neq q} V(r_{pq}) + V_{\mathrm{T}}(r_{pq})\left[\frac{(\mathbf{s}_p\mathbf{r}_{pq})(\mathbf{s}_q\mathbf{r}_{pq})}{r_{pq}^2} - \frac{1}{3}\mathbf{s}_p\mathbf{s}_q\right] \quad (25)$$

et peut aussi comprendre un potentiel à plus de 2 particules.

On notera enfin que l'expression de $\Phi(\mathbf{x}'_p;\ \theta_i,\ b'_{\mu\mu})$ en fonction des θ_i est connue, quelle que soit la définition des θ_i:

$$\Phi^I_M(\mathbf{x}'_1 \ldots \mathbf{x}'_A, b'_{\mu\nu}) = \sum_K \psi^I_K(\mathbf{x}'_1, \ldots \mathbf{x}'_A, b'_{\mu\mu}) D^{I\dagger}_{KM}(\theta_i). \quad (26)$$

On devrait y inclure un coefficient de normalisation correspondant au passage de l'intégrale de normalisation en $\int \mathrm{d}b_{12}\,\mathrm{d}b_{23}\,\mathrm{d}b_{31}$ à celle en $\int (\mathrm{d}\theta_i)$; mais nous choisirons ces éléments différentiels pour que ces coefficients se réduisent à un.

a) Résultat général sur les dérivées des $D^I_{MK}(\theta_i)$

On a en général

$$\psi^I_K(\mathbf{x}'_1 \ldots \mathbf{x}'_A) = \sum_M \Psi^I_M(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_A) D^I_{MK}(\theta_i) \quad (27)$$

pour des angles θ_i donnés; θ_1 est l'angle d'une rotation autour de Oz, θ_2 celui d'une rotation autour de l'axe Oy_1 ainsi obtenu à partir de Oy, θ_3 celui d'une rotation autour de Oz', de sorte que

$$\psi = U\Psi = \mathrm{e}^{-i\theta_3 I_3}\mathrm{e}^{-i\theta_2 I_2}\mathrm{e}^{-i\theta_1 I_3}\Psi \quad (28)$$

et que D correspond à $\tilde{U}$.

D'après (26)

$$D^I_{MK} = \langle IM|\mathrm{e}^{-i\theta_1 I_3}\mathrm{e}^{-i\theta_2 I_2}\mathrm{e}^{-i\theta_3 I_3}|IK\rangle \equiv \langle IM|R|IK\rangle$$

en posant $(I_1, I_2, I_3) \equiv (I_x, I_y, I_z)$. D'où

$$\frac{\partial D^I_{MK}}{\partial\theta_2} = -i\langle IM|\mathrm{e}^{-i\theta_1 I_3}\mathrm{e}^{-i\theta_2 I_2} I_2 \mathrm{e}^{-i\theta_3 I_3}|IK\rangle = -i\langle IM|RI'_2|IK\rangle$$

si

$$I'_2 = \mathrm{e}^{i\theta_3 I_3} I_2 \mathrm{e}^{-i\theta_3 I_3};$$

I'_2 est l'opérateur transformé de I_2 quand on effectue sur Ψ la rotation θ_3 autour de Oz. Comme les I_k sont les composantes d'un

opérateur vectoriel, $I'_2 = q_{j2}(\theta_i)\ I_j$, les q_{j2} étant des éléments de matrice de cette rotation. De même

$$\frac{\partial D^I_{MK}}{\partial \theta_1} = -i\langle IM|RI'_3|IK\rangle,$$

où

$$I_3 = \mathrm{e}^{i\theta_3 I_3}\mathrm{e}^{i\theta_2 I_2} I_3 \mathrm{e}^{-i\theta_2 I_2}\mathrm{e}^{-i\theta_3 I_3}$$

s'obtient par la rotation $(\theta_3,\ \theta_2,\ 0)$. En général

$$\frac{\partial D^I_{MK}}{\partial \theta_i} = -i\langle IM|RI'_i|IK\rangle = -i\langle IM|Rq_{ji}I_j|IK\rangle$$

$$= -iq_{ji}(\theta_i)\langle IM|R|I_\mu\rangle\langle I_\mu|I_j|IK\rangle \equiv -i\,q_{ji}D^I_{M\mu}(I_j)_{\mu K},$$

les $(I_j)_{\mu K}$ étant les éléments de matrice des composantes du moment angulaire.

Si l'on définit les opérateurs

$$Q_j = -\frac{1}{i}q^{-1}_{ji}\frac{\partial}{\partial\theta_i} \tag{29}$$

on voit que

$$Q_j D^I_{MK} = D^I_{M\mu}(I_j)_{\mu K} \tag{30}$$

et de même

$$Q_j D^{I\dagger}_{KM} = -(I_j)_{K\mu} D^{I\dagger}_{\mu M}. \tag{30bis}$$

D'ailleurs $q_{j3} = \delta_{j3}$ $(I'_3 = I_3)$ de sorte que

$$Q_3 = -\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta_3}.$$

Les $-Q_j$ sont les opérateurs correspondant aux composantes du moment cinétique sur les axes intrinsèques dans le problème du mouvement d'un solide ayant un point fixe (gyroscope). D'ailleurs

$$(\sum_j Q^2_j)D^I_{MK} = D^I_{MK}\,\mathbf{I}^2 = I(I+1)\,D^I_{MK}$$

et il en résulte que les $D^I_{MK}(\theta_i)$ sont les fonctions d'onde du gyroscope à axe de révolution; $\mathbf{I}$ a alors pour projection M sur Oz et K sur l'axe Oz' de révolution.

Cette démonstration et ces résultats sont donnés par Schwinger [15]). Remarquons qu'une expression différentielle du type

$$\frac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial\theta_i}\mathrm{d}\theta_i = -iq_{ji}\,\mathrm{d}\theta_i Q_j D_{\mu\nu} = -i\,\mathrm{d}\omega_j Q_j D_{\mu\nu}$$

d'après (29), si l'on définit la forme différentielle

$$\mathrm{d}\omega_j = q_{ji}\,\mathrm{d}\theta_i. \tag{31}$$

b) Mouvement collectif de rotation

Nous supposerons d'abord que les variables a_0, a_2, b varient peu autour de valeurs moyennes, et que les dérivées $\partial\Phi/\partial a_0$, $\partial\Phi/\partial a_2$, $\partial\Phi/\partial b$ sont petites devant les $\partial\Phi/\partial\theta_i$, $\partial\Phi/\partial x'_{p\nu}$, de sorte que l'on peut négliger les termes de (24) dans la parenthèse. Ceci revient à négliger dans l'Hamiltonien transformé $\mathscr{H}$ les termes cinétiques de vibration et de „pulsation" (variation de b, c'est à dire du volume du noyau).

Alors, la transformation sur Ψ équivaut à la transformation unitaire U' où

$$U' = e^{-i\theta_3 L_z} e^{-i\theta_2 L_y} e^{-i\theta_1 L_z},$$

les θ_i dépendant des $\mathbf{x}_p$. Si les θ_i étaient des constantes, il faudrait aussi d'ailleurs effectuer la rotation sur les composantes du spineur Ψ par

$$U'' = e^{-i\theta_3 S_z} e^{-i\theta_2 S_y} e^{-i\theta_1 S_z},$$

la transformation totale étant réalisée par l'opération $U = U''\,U' = U'\,U''$ qui intervient dans l'éq. (28); v garde ainsi la même expression en fonction des $\mathbf{x}'_p$. Ici, U' est compliqué par le fait que les θ_i dépendent des $\mathbf{x}_p$ (il en résulte que les facteurs de U' ne commutent pas avec ceux de U'') et nous utiliserons (28) en négligeant les spins pour le moment, de sorte que $\mathbf{I} = \mathbf{L}$, moment orbital.

Au lieu des $\partial/\partial\theta_i$, nous utiliserons en fait les Q_j dont la signification physique est claire. D'après (30bis) et (26)

$$Q_j \Phi^I_M = -\psi^I_K (I_j)_{K\mu} D^{I\dagger}_{\mu M}. \tag{32}$$

Substituant, alors (26) dans l'équation de Schrödinger, et décomposant l'Hamiltonien $\mathscr{H}$ sous la forme $\mathscr{H} = H_1(Q_j) + H_2$ on obtient

$$[H_1(-I_j)]_{K\mu}\psi^I_K D^{I\dagger}_{\mu M} + (H_2 - E)\psi^I_K D^{I\dagger}_{KM} = 0.$$

Multipliant par $D_{MK'}(\theta_i)$ et tenant compte de

$$\int D^{\dagger}_{\mu M} D_{MK'}(\mathrm{d}\theta_i) = \frac{\delta_{\mu K'}}{2I+1},$$

où

$$\int (\mathrm{d}\theta_i) \ldots . = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta_1 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta_3 \int_0^{\pi} \sin\theta_2\, \mathrm{d}\theta_2 \ldots .$$

on a enfin

$$[H_1(-I_j)]_{KK'}\psi^I_K + (H_2 - E)\psi^I_{K'} = 0, \tag{33}$$

c'est à dire des équations couplant entre elles les $2I+1$ fonctions

ψ_K^I. Nous pourrons donc dans $\mathscr{H}$ remplacer les Q_j par $-I_j$ avec la signification (33).

On obtient une fonction $\Phi(\mathbf{x}'_1, \ldots \mathbf{x}'_A; \theta_i)$ en remplaçant dans $\Psi(\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_A)$ les $\mathbf{x}_p$ en fonction des $\mathbf{x}'_p$ et θ_i:

$$u_{p\mu} = u'_{p\nu} D^{1\dagger}_{\nu\mu}(\theta_i)$$

par inversion de (22), d'où

$$Q_k \Phi = \frac{\partial \Psi}{\partial u_{p\mu}} Q_k u_{p\mu} = \frac{\partial \Psi}{\partial u_{p\mu}} u'_{p\nu} Q_k D^{1\dagger}_{\nu\mu} = -\frac{\partial \Psi}{\partial u_{p\mu}} u'_{p\nu} (L^1_k)_{\nu\lambda} D^{1\dagger}_{\lambda\mu}$$
$$= -\frac{\partial \Psi}{\partial u_{p\mu}} u_{p\varrho} D^1_{\varrho\nu} (L^1_k)_{\nu\lambda} D^{1\dagger}_{\lambda\mu}.$$

On a utilisé la notation, pour j quelconque:

$$L^j_1 = \frac{1}{2}(L^j_+ + L^j_-); \qquad L^j_2 = \frac{1}{2i}(L^j_+ - L^j_-)$$

avec

$$(L^j_+)_{m',m} = \delta_{m',m+1} \sqrt{(j-m)(j+m+1)},$$
$$(L^j_-)_{m',m} = \delta_{m',m-1} \sqrt{(j+m)(j-m+1)},$$

et

$$(L^j_3)_{m',m} = \delta_{m',m} m.$$

Pour $j = 1$,

$$(L^1_+)_{10} = (L^1_+)_{0-1} = (L^1_-)_{01} = (L^1_-)_{-1,0} = \sqrt{2},$$

et on vérifie aisément que

$$u_{p\varrho}(L^1_k)_{\varrho\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial u_{p\mu}} = L_k \Psi, \tag{34}$$

où

$$L_1 = \frac{1}{i} \sum_p \left(y_p \frac{\partial}{\partial z_p} - z_p \frac{\partial}{\partial y_p}\right), \text{ etc.}$$

sont les opérateurs des projections du moment orbital. Les $D^1_{\varrho\nu}(L^1_k)_{\nu\lambda} D^1_{\lambda\mu} = (L^1_k)_{\varrho\lambda}$ sont les opérateurs correspondants dans le système intrinsèque, c'est à dire les projections de L total sur les axes intrinsèques, en accord avec (32).

Il faut maintenant, pour calculer (24), obtenir les $\partial\theta_i/\partial x_{p\mu}$, c'est-à-dire $\partial\theta_i/\partial\alpha_\mu$, des éq. (21); différentiant les deux premières, on a

$$\mathrm{d}\alpha_\mu D^2_{\mu\nu} - i\alpha_\mu \mathrm{d}\omega_j Q_j D^2_{\mu\nu} = 0 \quad (\nu = \pm 1)$$

ou

$$i\alpha\ D^2_{um} (L^2_j)_{m\nu} \mathrm{d}\omega_j = \mathrm{d}\alpha_\varrho D^2_{\varrho\nu}.$$

En y substituant $\alpha_\mu = a_0 D^\dagger_{0\mu} + a_2(D^\dagger_{2\mu} + D^\dagger_{-2,\mu})$ et tenant compte de $D^\dagger_{\lambda\mu} D_{\mu m} = \delta_{\lambda m}$, on obtient

$$d\omega_j \left\{ a_0 (L^2_j)_{0\nu} + a_2 [(L^2_j)_{2\nu} + (L^2_j)_{-2,\nu}] \right\} = -i \, d\alpha_\varrho D_{\varrho\nu} \text{ pour } \nu = \pm 1.$$

Opérant de même avec la troisième, et utilisant les valeurs des éléments de matrice $(L^2_k)_{m'm}$ on obtient

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= -\frac{i}{2(a_2 + \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, a_0)} d\alpha_\mu (D^2_{\mu 1} + D^2_{\mu,-1}) \\ d\omega_2 &= \frac{1}{2(a_2 - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, a_0)} d\alpha_\mu (D^2_{\mu 1} - D^2_{\mu,-1}) \qquad (34) \\ d\omega_3 &= -\frac{i}{4a_2} d\alpha_\mu (D^2_{\mu 2} - D^2_{\mu,-2}), \end{aligned}$$

que l'on peut résumer sous la forme $\partial\omega_j/\partial\alpha_\mu = \beta^j_\varkappa \, D^2_{\mu\varkappa}$, les $\beta^j_\varkappa \, (a_0, a_2)$ résultant de (34). L'éq. (24) s'écrit ici

$$\nabla_p \Psi = -iQ_j \Phi \frac{\partial \omega_j}{\partial \alpha_\sigma} \nabla_p \alpha_\sigma + \frac{\partial \Phi}{\partial u'_{k\nu}} \nabla_p u'_{k\nu}$$

où

$$\nabla_p u'_{k\nu} = (\nabla_p u_{k\mu}) D^1_{\mu\nu} + u_{k\mu} \nabla_p D^1_{\mu\nu},$$

avec

$$\nabla_p D^1_{\mu\nu} = -iQ_l D^1_{\mu\nu} \frac{\partial \omega_l}{\partial \alpha_\varrho} \cdot \nabla_p \alpha_\varrho = -iD^1_{\mu\varkappa} (L^1_l)_{\varkappa\nu} \frac{\partial \omega_l}{\partial \alpha_\varrho} \cdot \nabla_p \alpha_\varrho .$$

On a donc

$$\nabla_p \Psi = \mathbf{A}_p + \mathbf{B}_p + \mathbf{C}_p$$

avec

$$\mathbf{A}_p \equiv -iQ_j \Phi \beta^j_\varkappa \, D^2_{\sigma\varkappa} \nabla_p \alpha_\sigma = -iQ_j \cdot \Phi \cdot \beta^j_\varkappa \, \nabla^*_p a_\varkappa ,$$

les ∇^*_p étant des dérivations par rapport aux $x_{p\varrho}$ dans lesquelles les angles θ_i des $D^2_{\sigma\varkappa}$ sont considérés comme des variables indépendantes en effet si les $u'_{p\nu}$ sont considérés comme fonctions des $u_{p\mu}$ *et des angles* θ_i par $u'_{p\nu} = u_{p\mu} D^1_{\mu\nu}(\theta_i)$, les θ_i étant des paramètres arbitraires, l'équation $a_\varkappa (u'_p) = \alpha_\sigma (u_p) D^2_{\sigma\varkappa} (\theta_i)$ donne†

$$\nabla^*_{p\mu} a_\varkappa = \frac{\partial a_\varkappa}{\partial u'_{p\nu}} D^1_{\mu\nu}(\theta_i) = \frac{\partial \alpha_\sigma}{\partial u_{p\mu}} D^2_{\sigma\varkappa} (\theta_i).$$

† On a $\dfrac{\partial}{\partial u_{-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i \dfrac{\partial}{\partial y} \right)$; $\dfrac{\partial}{\partial u_1} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i \dfrac{\partial}{\partial y} \right)$; $\dfrac{\partial}{\partial u_0} = \dfrac{\partial}{\partial z}$.

En posant $\nabla'_{pv} \equiv \partial/\partial u'_{pv}$, on a donc

$$A_{p\mu} = -iQ_j \Phi \beta^j_\varkappa \nabla'_{pv} a_\varkappa \cdot D^1_{\mu v}(\theta_i);$$

$$\mathbf{B}_p \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial u'_{pv}} (\nabla_p u_{p\mu}) D^1_{\mu v}, \text{ ou } B_{p\mu} = \nabla'_{pv} \Phi \cdot D^1_{\mu v};$$

$$\mathbf{C}_p \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial u'_{kv}} u_{k\mu} D'_{\mu\varkappa} (L^1_l)_{\varkappa\varpi} \beta^l_\sigma D^2_{\varrho\sigma} \nabla_p \alpha_\varrho = -i \frac{\partial \Phi}{\partial u'_{kv}} u'_{k\varkappa} (L'_l)_{\varkappa\varpi} \beta^l_\sigma \nabla^*_p a_\sigma,$$

ou, d'après (34),

$$C_{p\mu} = -iL'_l \Phi \cdot \beta^l_\sigma \nabla_{pv} a_\sigma \cdot D^1_{\mu v},$$

où

$$L'_1 \equiv \frac{1}{i} \sum_p \left(y'_p \frac{\partial}{\partial z'_p} - z'_p \frac{\partial}{\partial y'_p} \right), \text{ etc.}$$

sont les composantes, sur les axes intrinsèques, du moment orbital relatif.

On voit d'après (34), avec (2b), que

$$\beta^1_\varkappa \nabla'_{pv} a_\varkappa = -\frac{i}{2(a_2 + \sqrt{\tfrac{3}{2}} a_0)} \nabla'_{pv}(a_1 + a_{-1})$$

$$= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{1}{a_2 + \sqrt{\tfrac{3}{2}} a_0} \frac{G}{G'} \nabla'_{pv} b'_{23},$$

$$\beta^2_\varkappa \nabla'_{pv} a_\varkappa = -\frac{1}{2(a_2 - \sqrt{\tfrac{3}{2}} a_0)} \nabla'_{pv}(a_1 - a_{-1}) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{1}{a_2 - \sqrt{\tfrac{3}{2}} a_0} \frac{G}{G'} \nabla'_{pv} b_{31},$$

$$\beta^3_\varkappa \nabla'_{pv} a_\varkappa = -\frac{i}{4a_2} \nabla'_{pv}(a_2 - a_{-2}) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{1}{2a_2} \frac{G}{G'} \nabla'_{pv} b'_{12}.$$

Nous poserons $b'_{23} = G' c_1$, etc. par permutation circulaire. Alors

$$\beta^j_\varkappa \nabla'_{pv} a_\varkappa = \lambda(j) \nabla'_{pv} c_j \quad (\text{sans sommation sur } j),$$

avec

$$\lambda(1) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{G}{a_2 + \sqrt{\tfrac{3}{2}} a_0}, \quad \lambda(2) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{G}{a_2 - \sqrt{\tfrac{3}{2}} a_0},$$

$$\lambda(3) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cdot \frac{G}{2a_2} \qquad (35)$$

Le facteur G figurant aussi dans la définition de a_0, a_2, on voit que l'on peut le choisir arbitrairement: il disparaît dans les expressions en fonction des $x'_{p\mu}$. Ceci résulte d'ailleurs immédiatement

du fait que les éq. (21) définissant les θ_i sont homogènes par rapport aux α_μ.

En posant

$$A_{p\mu} \equiv D^1_{\mu\nu} A'_{p\nu} \Phi, \qquad B_{p\mu} \equiv D^1_{\mu\nu} B'_{p\nu} \Phi, \qquad C_{p\mu} \equiv D^1_{\mu\nu} C'_{p\nu} \Phi,$$

on a

$$\begin{aligned} A'_{p\nu} &= -i\lambda(j)(\nabla'_{p\nu} c_j) Q_j \\ B'_{p\nu} &= \nabla'_{p\nu} \\ C'_{p\nu} &= -i\lambda(j)(\nabla'_{p\nu} c_j) L'_j. \end{aligned} \tag{36}$$

Comme

$$\nabla_{p\mu} \Phi = D^1_{\mu\nu} (A'_{p\nu} + B'_{p\nu} + C'_{p\nu}) \Phi$$

ne dépend plus que des $\mathbf{x}'_p$, θ_i, on peut itérer:

$$\begin{aligned} \sum_p \nabla^2_p &= (-1)^\mu \nabla_{p,-\mu} \nabla_{p\mu} \\ &= (-1)^\mu D^1_{-\mu,\varrho} (A'_{p\varrho} + B'_{p\varrho} + C'_{p\varrho}) D^1_{\mu\nu} (A'_{p\nu} + B'_{p\nu} + C'_{p\nu}) \\ &= (-1)^\nu (A'_{p,-\nu} + B'_{p,-\nu} + C'_{p,-\nu})(A'_{p\nu} + B'_{p\nu} + C'_{p\nu}) \\ &\qquad + (-1)^\mu D^1_{-\mu,\varrho} (A'_{p\varrho} D^1_{\mu\nu})(A'_{p\nu} + B'_{p\nu} + C'_{p\nu}), \end{aligned} \tag{37}$$

compte tenu de $(-1)^\mu D^1_{-\mu,\varrho} D^1_{\mu\nu} = (-1)^\nu \delta_{\nu,-\varrho}$ et du fait que $A'_{p\varrho}$, contenant seul Q, opère seul sur D^1.

On obtient ainsi pour la partie cinétique T de H,

$$T \equiv T(\theta_i) + T(x', \theta_i) + T(x').$$

Dans le cas d'un tenseur $b_{\mu\nu}$ général, $T(\theta_i)$ a une forme compliquée contenant un terme $T(Q_k Q_j)$ quadratique en les Q:

$$T(Q_k Q_j) \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} (-1)^\nu A'_{p,-\nu} A'_{p,\nu} = \frac{\hbar^2}{2m} \lambda(k)\lambda(j)(\nabla'_p c_k \cdot \nabla'_p c_j) Q_k Q_j, \tag{38}$$

et un terme linéaire $T(Q_j)$ provenant du 2ème terme de (37). $T(x', \theta_i)$ contient 2 termes, l'un en $Q_k L'_j$ analogue au $I_\mu J_\mu$ dans l'Hamiltonien de Bohr-Mottelson, l'autre nouveau en $Q_k \nabla'_p$:

$$T(x', \theta_i) = \frac{\hbar^2}{m} \lambda(k)\lambda(j)(\nabla'_p c_k \cdot \nabla'_p c_j) Q_k L'_j - \frac{\hbar^2}{m} \lambda(k)(\nabla'_p c_k) \frac{\nabla'_p}{i} Q_k. \tag{39}$$

Enfin $T(x')$ contient, outre $-(\hbar^2/2m)\sum_p \nabla'^2_p$, en général tous les termes obtenus à partir de ceux de $T(\theta_i)$ en remplaçant les Q_k par L'_k. De même, le 2ème terme de (39) a pour analogue un terme en

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\nabla'_p}{i} L'_k + L'_k \frac{\nabla'_p}{i}\right) \text{ au lieu de } \frac{\nabla'_p}{i} Q_k.$$

Nous avons omis jusqu'ici le terme $(\hbar^2/2Am)\sum_{pq}\nabla_p\nabla_q$ figurant dans (23). Pour en tenir compte, il faut ajouter à (38), (39), les termes obtenus en remplaçant le premier ∇_p par ∇_q et en prenant

$$-A^{-1}\sum_{pq}.$$

L'expression (39) montre que les termes croisés existent *quel que soit* $b_{\mu\nu}$ en particulier le deuxième puisque $\nabla'_p c_k \neq 0$. Ce 2ème terme ne peut d'ailleurs se ramener à la forme $L'_j Q_k$ par un certain choix de $b_{\mu\nu}$: pour que $\nabla'_p c_k \cdot (\nabla'_p/i)$ se réduise à $\varphi L'_3$, φ étant une fonction quelconque des $x'_{p\mu}$, avec l'un des c_k, il faudrait que

$$\frac{\partial c_k}{\partial z'_p}=0; \qquad \frac{\partial c_k}{\partial y'_p}=\varphi\cdot x'_p, \qquad \frac{\partial c_k}{\partial x'_p}=-\varphi\cdot y'_p$$

d'où la relation nécessaire

$$y'_p\frac{\partial c_k}{\partial y'_p}+x'_p\frac{\partial c_k}{\partial x'_p}\equiv 0$$

et

$$c_k \propto \sum_p f_p\left(\frac{y'_p}{x'_p}\right),$$

ce qui est impossible pour une composante $b'_{\mu\nu}$.

Ayant démontré ce point, nous considérerons dans tout ce qui suit le tenseur particulier (11), tenseur de masse, avec lequel toutes les expressions se simplifient. Dans ce cas en effet

$$c_1 \equiv \sum_p y'_p z'_p \text{ etc. par permutation,} \tag{40}$$

et l'on a

$$\nabla'_p c_1 \nabla'_p c_2 \equiv c_3 \text{ etc. par permutation.}$$

1) Comme les $c_k\overline{\Phi}=0$ d'après (19), il ne reste dans $T(Q_kQ_j)$ que les termes $k=j$:

$$T(Q_kQ_j)\equiv T_{\text{rot}}=\frac{\hbar^2}{2}\sum_{k=1}^{2}\frac{Q_k^2}{\mathscr{I}_k};$$

on a posé

$$\frac{1}{\mathscr{I}_k}=\frac{\lambda_k^2}{2m}\sum_p(\nabla'_p c_k)^2.$$

Comme

$$\sum_p(\nabla'_p c_1)^2=\sum_p(y'^2_p+z'^2_p), \text{ etc.}$$

on obtient en exprimant a_0, a_2 en fonction des $x'_{p\mu}$,

$$\mathcal{I}_1 = m\frac{\left(\sum_p (y_p'^2 - z_p'^2)\right)^2}{\sum_p (y_p'^2 + z_p'^2)} \quad \text{etc. par permutation circulaire.}$$

On peut au contraire exprimer les $\mathcal{I}_k$ en fonction de a_0, a_2 (ou β, γ) et b. Prenons, comme Bohr-Mottelson, $G = 4\pi(3AR^2)^{-1}$ et posons $B = AmR^2(3/8\pi)$; prenons d'autre part $G' = [(3/5)AR^2]^{-1}$ dans l'expression de b. Ainsi b a une valeur moyenne ≈ 1 si R^2 est le carré moyen du rayon nucléaire. On trouve alors

$$\mathcal{I}_k = \mathcal{I}_k^0 (b - \varepsilon_k)^{-1},$$

où les $\mathcal{I}_k^0$ sont les moments d'inertie calculés dans le modèle unifié [1, 2])

$$\mathcal{I}_k^0 = 4B\beta^2 \sin^2\left(\gamma - k\frac{2\pi}{3}\right)$$

et les ε_k sont les expressions (5).

Ainsi, les ε_k étant < 1 et $b \approx 1$, T_{rot} diffère peu de son expression dans le modèle unifié [1, 2]). On trouve d'autre part que $T(Q_j) \equiv 0$. Enfin, tous les termes en $A^{-1}\nabla_q' c_k \cdot \nabla_p'$ s'annulent, quand on effectue $\sum_{qp}$, d'après (16), car $\nabla_q' c_1 = (0, z_q', y_q')$ par exemple, d'où $(\sum_q \nabla_q' c_1)\bar{\Phi} = 0$. Donc

$$T(\theta_i) = T_{\text{rot}}.$$

2) Pour le terme $T(x', \theta_i)$, posons

$$\frac{1}{i}\nabla_p' c_1 \cdot \nabla_p' = \frac{1}{i}\sum_p y_p' \frac{\partial}{\partial z_p'} + z_p' \frac{\partial}{\partial y_p'} \equiv N_1', \text{ etc. par permutation circulaire.}$$

On peut écrire

$$T(x', \theta_i) = \hbar^2 \sum_{k=1}^{3} \frac{Q_k L_k'}{\mathcal{I}_k} - \frac{\lambda_k}{m} N_k' Q_k.$$

En effet, les termes rectangles en $\nabla_p' c_1 \cdot \nabla_p' c_2 Q_1 L_2' = c_3 Q_1 L_2'$, par exemple, disparaissent car †† $(c_3 L_2')\bar{\Phi} = (L_2' c_3)\bar{\Phi} = 0$ (les c_k et Q_j commutent évidemment puisqu'ils opèrent sur les $\mathbf{x}_p'$ et les θ_i respectivement; ce qui permettait d'éliminer les termes rectangles dans $T(\theta_i)$).

† La valeur 1 résulterait d'une densité constante de la matière nucléaire, qui s'accorde en moyenne avec les données expérimentales, et avec le modèle en couches (avec un potential d'oscillateur harmonique, par exemple).

†† On verra au présent § 2.3, lit. *c*) ci-après, que

$$[L_3', c_3] = \frac{1}{i} c_1.$$

On voit aussi, comme ci-dessus, que les termes $A^{-1}\sum_{pq}\nabla'_q c_k\cdot\nabla'_p$ disparaissent. Posons

$$\overline{\mathscr{I}}_k\equiv\frac{m}{\lambda_k}=\sqrt{\frac{16\pi}{15}}\cdot\sqrt{B\mathscr{I}^0_k}$$

d'après (35), en choisissant un signe convenable pour chaque $\sqrt{\mathscr{I}^0_k}$. Alors

$$T(x',\theta_i)=\hbar^2\sum_k\left(\frac{L'_k}{\mathscr{I}_k}-\frac{N'_k}{\overline{\mathscr{I}}_k}\right)Q_k.$$

3) Enfin, rassemblant les termes de $T(x')$, on a †

$$T(x')=-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_p\nabla'^2_p+\hbar^2\sum_{k=1}^{3}\frac{L'^2_k}{2\mathscr{I}_k}-\frac{N'_kL'_k}{\overline{\mathscr{I}}_k}+\frac{P'_k}{2\overline{\mathscr{I}}_k}$$

où

$$P'_1\equiv\sum_p y'_p\frac{\partial}{\partial y'_p}-z'_p\frac{\partial}{\partial z'_p}\ \text{ etc. par permutation.}$$

Pour

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a_0}\approx\frac{\partial\Phi}{\partial a_2}\approx\frac{\partial\Phi}{\partial b}\approx 0,$$

on a ainsi pour la partie cinétique T de $\mathscr{H}$ l'expression

$$T=\sum_{i=1}^{A}\frac{p'^2_i}{2m}+\hbar^2\sum_\varkappa\frac{(L_\varkappa-L'_\varkappa)^2}{2\mathscr{I}_\varkappa}+\frac{N'_\varkappa(L_\varkappa-L'_\varkappa)}{\overline{\mathscr{I}}_\varkappa}+\frac{1}{2\overline{\mathscr{I}}_\varkappa}P'_\varkappa,\qquad(41)$$

dans laquelle les $L_\varkappa$, $L'_\varkappa$ sont respectivement les composantes du moment orbital absolu et du moment orbital relatif, et

$$\mathscr{I}_1=m\frac{\left[\sum_p(y'^2_p-z'^2_p)\right]^2}{\sum_p(y'^2_p+z'^2_p)},\ \text{etc.;}\qquad(41b)$$

$$N'_1\equiv\frac{1}{i}\sum_p y'_p\frac{\partial}{\partial z'_p}+z'_p\frac{\partial}{\partial y'_p}\ \text{ etc.},\qquad P'_1\equiv\sum_p y'_p\frac{\partial}{\partial y'_p}-z'_p\frac{\partial}{\partial z'_p},\ \text{etc.;}$$

$$\overline{\mathscr{I}}_1=m\textstyle\sum_p(y'^2_p-z'^2_p),\ \text{etc.}\qquad(41c)$$

Avec $G=4\pi(3AR^2)^{-1}$, $G'=[(3/5)AR^2]^{-1}$, qui impliquent $b\approx 1$, on a

$$\mathscr{I}_\varkappa=\mathscr{I}_\varkappa(b-\varepsilon_\varkappa)^{-1},\qquad\mathscr{I}^0_\varkappa=4B\beta^2\sin^2\left(\gamma-\varkappa\frac{2\pi}{3}\right),$$

† Le dernier terme $\sum_k(P'_k/2\overline{\mathscr{I}}_k)$ a été omis dans les notes réf. [4]).

$$\overline{\mathcal{I}}_\varkappa = \sqrt{\frac{4\pi}{15}}\, 4\beta B \sin\left(\gamma - \varkappa\frac{2\pi}{3}\right); \qquad \varepsilon_\varkappa = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\,\beta\cos\left(\gamma - \varkappa\frac{2\pi}{3}\right).$$

Il reste à introduire les spins, ce que nous ferons en admettant que Φ^I_M peut être développée en fonctions d'onde correspondant au couplage LS:

$$\Phi^I_M = \sum_{LS,\, M_L\, M_S} a_{LS}\, \Phi^L_{M_L}\, u_{M_S} \langle LS\, M_L\, M_S | LS\, I\, M\rangle.$$

Les Ψ^I_K correspondants de (26) peuvent aussi se développer alors en fonctions propres de $\mathbf{L}^2$, $(\mathbf{L}')^2$, L'_3 et S, et l'on trouve qu'elles vérifient l'équation déduite de (41) en y remplaçant $L_\varkappa - L'_\varkappa$ par $I_\varkappa - J_\varkappa$, où les $I_\varkappa = L_\varkappa + S_\varkappa$ sont les composantes du moment angulaire absolu et les $J_\varkappa = L'_\varkappa + S_\varkappa$ celles du moment angulaire relatif.

c) Remarques sur le résultat obtenu

Les opérateurs $N'_\varkappa$, $P'_\varkappa$ qui figurent dans (41) sont tout à fait inusuels; avec les $L'_\varkappa$ et $R' \equiv \sum_p \mathbf{x}'_p \cdot \nabla'_p$, ils forment les neuf opérateurs infinitésimaux du groupe complet des *transformations linéaires*, les $P'_\varkappa$ se réduisant en fait à deux opérateurs, puisque $P'_1 + P'_2 + P'_3 \equiv 0$. On pouvait prévoir leur rôle dans une théorie où l'on cherche à retrouver des mouvements collectifs correspondant à un champ de déplacement linéaire $\delta_\mu = b_{\mu\nu} x_\nu$ [éq. (7)].

Appliquons à $\Psi(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_A)$ la transformation linéaire infinitésimale

$$x_{p\mu} \to X_{p\mu} = x_{p\mu} + b_{\mu\nu} x_{p\nu},$$

les $b_{\mu\nu}$ étant des constantes, c'est à dire que $\Psi \to \Psi'$ telle que

$$\Psi'(\mathbf{X}_1, \ldots \mathbf{X}_A) = \Psi(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_A)$$

$$\Psi'(x_{p\mu}) = \Psi(x_{p\mu} - b_{\mu\nu} x_{p\nu}) = \left(1 - b_{\mu\nu} x_{p\nu} \frac{\partial}{\partial x_{p\mu}}\right) \Psi.$$

L'opérateur $b_{\mu\nu} x_{p\nu} (\partial/\partial x_{p\mu})$ s'exprime en fonction des $i\, N_\varkappa$ associés à $\frac{1}{2}(b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu})$ avec $\mu \neq \nu$, des $iL_\varkappa$ associés à $\frac{1}{2}(b_{\mu\nu} - b_{\nu\mu})$ et des $x_{p\mu}$ $(\partial/\partial x_{p\mu})$ associés aux $b_{\mu\mu}$; ces trois derniers opérateurs peuvent s'exprimer à l'aide des $P_\varkappa$ non indépendants, et de R.

Dans l'hypothèse de Bohr-Mottelson, où $b_{\mu\nu}$ est symétrique (champ δ_μ irrotationnel), les $L_\varkappa$ n'interviennent pas †. Cependant,

† Dans une théorie comme celle que nous avons tenté de développer, où les $b_{\mu\nu}$ sont fonctions des $x_{p\mu}$, on ne peut obtenir des mouvements collectifs rotationnels, puisqu'il n'y a pas de tenseur antisymétrique, mais symétrique par échange de deux nucléons, construit simplement avec les x_p.

la pseudo-rotation du modèle unifié apparaît ici comme liée au fait que l'on peut obtenir les $L_\varkappa$ par itération des $N_\varkappa$:

$$[N_1, N_2] = iL_3, \text{ etc.}$$

Les $P_\varkappa$, R correspondent aux transformations d'affinité. Par P_3, $x \to x(1+\varepsilon)$ et $y \to y(1-\varepsilon)$ de sorte que $xy = \text{const.}$: ainsi les $P_\varkappa$ correspondent à des déformations à volume constant. Au contraire, par R, les $x_\mu \to x_\mu(1+\varepsilon)$ et le volume est modifié. Les $P_\varkappa$, R commutent entre eux, mais seul R commute avec les $L_\varkappa$, $N_\varkappa$: $[L_1, P_2] = L_1$; $[L_1, P_3] = -L_1$; $[L_1, P_1] = 0$ et de même avec les N remplaçant les L.

Si l'on applique ces divers opérateurs à une fonction $f(\mathbf{x})$, on voit que $P_3 f = 0$ si f ne dépend que de xy, $N_3 f = 0$ pour $f(x^2-y^2)$, tandis que $L_3 f = 0$ pour $f(x^2+y^2)$. Les opérateurs P_3 et N_3 correspondent donc à des déformations le long des familles d'hyperboles équilatères d'équations $xy = \text{const}$, $x^2-y^2 = \text{const}$: ce sont les mouvements „de marée" du modèle unifié qui causent la rotation de la surface. Quant à R, il correspond à des dilatations ou contractions, exclues dans le modèle unifié.

Si l'on revient à la tentative théorique où les $b_{\mu\nu}$ sont fonctions des $\mathbf{x}_p$, il est intéressant de connaître les commutateurs de ces opérateurs avec les expressions c_k et $A_1 \equiv \Sigma x_p'^2$, $A_2 \equiv \Sigma y_p'^2$, $A_3 \equiv \Sigma z_p'^2$, permettant de calculer les $\mathcal{I}_\varkappa$, $\overline{\mathcal{I}}_\varkappa$, b:

$$[N_1', c_1] = \frac{1}{i}(A_2+A_3); \qquad [L_1', c_1] = \frac{1}{i}(A_2-A_3),$$

tandis que

$$[N_2', c_1] = \frac{1}{i}c_3, \qquad [N_3', c_1] = \frac{1}{i}c_2,$$

et de même en remplaçant N_2', N_3' par $-L_2'$, $-L_3'$. L'effet de ces commutateurs sur Φ donne un résultat nul d'après (19). Il en est de même pour tous les $[P_\varkappa', c_k]\overline{\Phi}$, les $[N_\varkappa', A_k]\overline{\Phi}$, et les $[L_\varkappa', A_k]\overline{\Phi}$. Il en résulte que les facteurs $\mathcal{I}_\varkappa^{-1}$, $\overline{\mathcal{I}}_\varkappa^{-1}$ commutent avec les opérateurs correspondants de (41) (sauf $\overline{\mathcal{I}}_\varkappa^{-1} P_\varkappa'$ qui doit être écrit dans cet ordre), et que les c_k commutent avec (41) comme il est nécessaire. Cette dernière propriété résulte de

$$-\frac{1}{2m}[\sum_p \nabla_p'^2, c_k] = -\frac{i}{m}N_k'$$

et des expressions (41b–c) des $\mathcal{I}_\varkappa$, $\overline{\mathcal{I}}_\varkappa$.

2.4. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER TRANSFORMÉE

Si l'on admet que l'on peut remplacer les expressions $\mathscr{I}_\varkappa$, $\overline{\mathscr{I}}_\varkappa$ par leurs valeurs moyennes constantes, l'Hamiltonien obtenu,

$$\mathscr{H} = T+U+v,$$

diffère de celui de Bohr-Mottelson par les termes en $\overline{\mathscr{I}}_\varkappa^{-1}$ dont le rapport à T_{rot} en $\mathscr{I}_\varkappa^{-1}$ est de l'ordre de

$$\frac{\mathscr{I}_\varkappa}{\overline{\mathscr{I}}_\varkappa} = \sqrt{\frac{15}{4\pi}}\,(b-\varepsilon_\varkappa)^{-1}\,\beta_1 \sin\left(\gamma_1 - \varkappa\frac{2\pi}{3}\right)$$

(β_1, γ_1 valeurs moyennes).

Pour un noyau de révolution ($\gamma_1 = 0$ ou π), ce rapport est $\approx 3\varepsilon_3/(2+\varepsilon_3)$, soit ≈ 0.33 pour les grandes déformations, pour lesquelles $\varepsilon_3 \approx 0.20$ à 0.25 d'après les valeurs expérimentales (cf. réf. [8])), et ≈ 0.16 pour les faibles déformations.

Parmi ces termes, ce sont les termes croisés $N'_\varkappa I_\varkappa/\overline{\mathscr{I}}_\varkappa$ qui risquent de détruire la forme usuelle des niveaux de rotation. Pour évaluer leur effet nous admettrons que la déformation β_1 est assez faible pour que H_{int} puisse être traité comme une perturbation. Nous admettons aussi, comme dans [1, 2]), que l'ensemble des termes $\sum_\varkappa$ est petit devant

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Sigma\nabla'^2_p \approx A\frac{\hbar^2}{2mr_0^2},$$

puisque

$$\hbar^2\mathscr{I}_1^{-1} = \hbar^2\mathscr{I}_2^{-1} \approx \frac{8\hbar^2}{3AmR^2\beta_1^2} = \frac{8}{3}A^{-5/3}\beta_1^{-2}\frac{\hbar^2}{mr_0^2}$$

pour une forme de révolution. A l'approximation 0, les fonctions propres $\Psi^I_K(x')$ sont donc les $X^J_\Omega(x')\varphi^{IJ}_{K\Omega}$, les φ étant des constantes. En fonction des composantes d'un tenseur irréductible $T^{(2)}_{\bar\mu}$ et des $I_{\bar\mu}$ ($\bar\mu = -1,\ 0,\ 1$),

$$N'_1 I_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(T^{(2)}_{\bar1}+T^{(2)}_{\bar1})(I_{-\bar1}-I_{\bar1}),$$

$$N'_2 I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^{(2)}_{\bar1}-T^{(2)}_{-\bar1})(I_{-\bar1}+I_{\bar1})$$

connectent J, Ω, K à J ou $J\pm1$ ou $J\pm2$, $\Omega\pm1$, $K\pm1$, et

$$N'_3 I_3 = \tfrac{1}{2}(T^{(2)}_{\bar2}-T^{(2)}_{-\bar2})I_0$$

connecte J, Ω, K à J ou $J\pm1$ ou $J\pm2$, $\Omega\pm2$, K. Pour $J = 0$,

ces éléments de matrice sont nuls; dans le cadre du modèle en couches, ceci se produit pour des couches fermées.

Nous considérerons le cas simple où il y a un seul nucléon en dehors des couches fermées (ce qui s'accorde avec une faible déformation) et prendrons seulement les éléments de matrice diagonaux en $n, l, j = J$. La fonction d'onde est alors de la forme $\Sigma_{K\Omega}\varphi^{IJ}_{K\Omega}X^J_\Omega(x')$, les $\varphi_{K\Omega}$ et la valeur de l'énergie à l'approximation 1 étant déterminés par une équation séculaire, une fois les éléments de matrice $\langle n\,l\,j\Omega'|N'_x|\,n\,l\,j\Omega\rangle$ calculés.

En prenant des fonctions d'onde radiales d'oscillateur harmonique isotrope, et utilisant la relation

$$N'_1 = i\sqrt{\frac{8\pi}{15}}(Y^1_2+Y^{-1}_2)rp_r - 2\sqrt{\frac{2\pi}{15}}(Y^2_2L'_-+Y^{-2}_2L'_+) - \left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}}Y^0_2\right)(L'_++L'_-),$$

on trouve facilement, par exemple, l'élément de matrice réduit $(0, l, j = l+\frac{1}{2}||T^{(2)}||0, l, j = l+\frac{1}{2})$

$$= \frac{14l-15}{12}\sqrt{\frac{2(l+1)(l+2)}{3(2l+3)}} \quad \text{pour } l \geqq 1. \quad (42)$$

Dans le cas de la symétrie de révolution

$$\overline{\mathscr{I}}_3 = 0, \qquad \overline{\mathscr{I}}_2 = -\overline{\mathscr{I}}_1 \equiv \overline{\mathscr{I}} = \sqrt{\frac{\pi}{5}}4B\beta_1, \qquad (43)$$

d'où les termes croisés

$$\frac{1}{\overline{\mathscr{I}}}[N'_2I_2-N'_1I_1] = \frac{1}{\overline{\mathscr{I}}}(T_{\bar{1}}I_-+T_{-\bar{1}}I_+)$$

que l'on peut regrouper avec $-\mathscr{I}^{-1}(I_1J_1+I_2J_2)$, obtenant

$$I_-\left(\frac{T_{\bar{1}}}{\overline{\mathscr{I}}}-\frac{J_+}{2\mathscr{I}}\right)+I_+\left(\frac{T_{-\bar{1}}}{\overline{\mathscr{I}}}-\frac{J_-}{2\mathscr{I}}\right).$$

Avec (42), (43), et $\mathscr{I} = 3B\beta^2$, on obtient alors les éléments de matrice

$$\left(\frac{T_{\bar{1}}}{\overline{\mathscr{I}}}-\frac{J_+}{2\mathscr{I}}\right)_{\Omega+1,\,\Omega} = \frac{\sqrt{(j-\Omega)(j+\Omega+1)}}{2B\beta_1}\left[\frac{15-14l}{24(2l+3)}\sqrt{\frac{5}{2l(2l+1)}}\frac{2\Omega+1}{\sqrt{\pi}}-\frac{1}{3\beta_1}\right] \quad (44)$$

et

$$\left(\frac{T_{-\bar{1}}}{\mathscr{J}}-\frac{J_-}{2\mathscr{J}}\right)_{\Omega-1,\,\Omega}$$

qui s'en déduit en remplaçant Ω par $-\Omega$.

Pour $\beta_1 = 0.15$ qui correspond à une faible déformation, $(3\beta_1)^{-1} = 2.22$ tandis que le premier terme du crochet, maximum pour $\Omega = j$ dans (44), prend les valeurs maxima suivantes:

$l=1$	$l=2$	$l=\infty$
0.0172	−0.131	−0.368.

Les termes croisés en $I_\varkappa J_\varkappa$ sont donc prédominants. Ces termes provenant de T_{rot} existent dans [1, 2]; mais, dans le cas de la symétrie cylindrique, la condition $H_{\text{int}} \gg T_{\text{rot}}$ ($T_{\text{rot}}/H_{\text{int}} < 5\times 10^{-2}$ pour les petites déformations, $< 5\times 10^{-3}$ pour les grandes) impose que Ω soit un bon nombre quantique et alors $\langle J_1\rangle = \langle J_2\rangle = 0$ dans T_{rot} qui peut être traité comme une perturbation. Le même traitement conduirait ici à $\langle N_1'\rangle = \langle N_2'\rangle = 0$ également, donc aux niveaux de rotation

$$E = E_{\text{intr}} + \frac{\hbar^2}{2\mathscr{J}} I(I+1) - \frac{\hbar^2\Omega^2}{2\mathscr{J}} \quad (K=\Omega, \text{ valeur unique dans ce cas}).$$

Malheureusement, les termes en $N_\varkappa'$ disparaissant de $\mathscr{H}$, celui-ci ne commuterait plus avec les c_k et toute la méthode des variables supplémentaires tomberait en défaut d'après les résultats du § 2.2.

D'ailleurs, nous n'avons pas justifié le fait que les $\mathscr{J}_\varkappa$, $\overline{\mathscr{J}}_\varkappa$ peuvent être remplacés par leurs valeurs moyennes. Si on ne le fait pas, $\langle\Omega|\mathscr{J}_1^{-1}J_1|\Omega\rangle$ par exemple devient $\sum_{\Omega'}\langle\Omega|\mathscr{J}_1^{-1}|\Omega'\rangle\langle\Omega'|J_1|\Omega\rangle \neq 0$. On évite cette difficulté en considérant a_0, a_2, b comme variables supplémentaires, et complétant $\mathscr{H}$ par les termes contenant $\partial\Phi/\partial b_{\mu\mu}$: $T(a_0 a_2 b)+T(a_0 a_2 b, x')$ s'ajoutant à T de (41).

Même en négligeant ces termes dans un traitement adiabatique, comme dans [1, 2]), et comme nous l'avons fait jusqu'ici, on serait très embarrassé pour trouver les *valeurs d'équilibre* $\beta_1\gamma_1$: compte tenu des conditions subsidiaires, H_{int}, et $V_S = \frac{1}{2}C\beta^2$ (dont on ne voit pas ici la signification physique) peuvent s'exprimer indifféremment à l'aide des $x'_{p\mu}$ ou des β, γ. Cette difficulté se rattache à la précédente: sous la forme (12), H_{int} disparaît en fait comme potentiel „polarisant" le noyau, c'est à dire levant la dégénérescence sur Ω. Elle est liée au fait que les $b_{\mu\nu}$ ne sont pas des variables indépendantes des $\mathbf{x}_p$.

3. Conclusion

Il n'est donc pas possible de considérer les variables dynamiques $b_{\mu\nu}$ de la „surface'' comme des fonctions des coordonnées des nucléons. Si l'on suppose qu'elles sont fonctions des coordonnées et des impulsions, mais si H_{int} est toujours donné par (1) on peut échanger $b_{\mu\nu}$ et $t_{\mu\nu} = k(r_p)\, x_{p\mu}\, x_{p\nu}/r_p^2$, en définissant le système intrinsèque comme celui qui diagonalise $t_{\mu\nu}$; on tomberait encore sur les mêmes difficultés. Il faudrait donc examiner des formes de H_{int} analogues à (12) telles que $H_{\text{int}} = \sum_{jk} x_{j\mu}\, p_{j\nu}\, x_{k\mu}\, p_{k\nu}$ ou $\sum_{jk} p_{j\mu}\, p_{j\nu}\, p_{k\mu}\, p_{k\nu}$ et voir si l'on peut définir un système intrinsèque diagonalisant $\sum_k x_{k\mu}\, p_{k\nu}\, \Psi$ ou $\sum_k p_{k\mu}\, p_{k\nu}\, \Psi$. En dehors de cette possibilité, qui ne peut conduire qu'à des interprétations compliquées plusieurs tentatives ont été faites ces derniers temps qui donnent des valeurs du moment d'inertie plus correctes que celles de [1, 2]):

1) On suppose que le potentiel nucléaire moyen tourne lentement avec une vitesse angulaire ω, suivant la méthode d'Inglis [16]). Par un calcul de perturbation au 2ème ordre, ce terme tournant donne une énergie proportionnelle à ω^2, et le coefficient donne le moment d'inertie $\mathcal{I}$ par la relation classique $\frac{1}{2}\mathcal{I}\omega^2$. Il reste cependant à justifier ce potentiel dépendant du temps pour un système fermé et l'introduction de cette vitesse angulaire classique.

2) Une méthode dûe à Wheeler, reprise par Peierls et Yoccoz [17]), traite les nucléons dans un puits de potentiel non sphérique d'orientation $(\theta_1\theta_2\theta_3)$ variable, d'où la fonction d'onde $\psi(x_{p\mu},\ \theta_1\theta_2)$ pour une symétrie de révolution. On forme

$$\Psi_M^I\ (x_{p\mu}) = \int X(\theta_1\theta_2)\psi(x_{p\mu},\ \theta_1\theta_2)\, \mathrm{d}\theta_1 \sin\theta_2\, \mathrm{d}\theta_2$$

et détermine X par un *principe variationnel* nouveau, de façon que $\langle\Psi|H|\Psi\rangle/\langle\Psi|\Psi\rangle$ soit minimum, H étant l'Hamiltonien réel (non celui du modèle en couches). Un terme en $I(I+1)$ apparaît dans l'énergie, dont le coefficient donne $\mathcal{I}$.

Nous remercions le Professeur A. Bohr, avec qui nous avons échangé une correspondance qui nous a beaucoup stimulé au début de ce travail. Nous remercions également pour d'intéressantes discussions le Professeur Kemmer, les Drs Pursey et Higgs du Tait Institute d'Edinburgh et les Drs Flowers, Skyrme et Lane de Harwell. Nous remercions spécialement le Professeur Kemmer, qui nous a invité à son Institut; ce séjour a été possible grâce à une I.C.I. Fellowship.

Bibliographie

1) A. Bohr, Dan. Mat. Fys. Medd. **26** (1952) No. 14
2) A. Bohr and B. R. Mottelson, Dan. Mat. Fys. Medd. **27** (1953) No. 16
3) A. Bohr, Rotational states of atomic nuclei, Thesis (1954)
4) R. Nataf, Comptes Rendus **240** (1955) 2510 et **214** (1955) 31
5) J. Rainwater, Phys. Rev. **91** (1950) 315
6) T. Huus, et Č. Zupančič, Dan. Mat. Fys. Medd. **28** (1953) No. 1
7) K. W. Ford, Phys. Rev. **90** (1953) 29
8) K. W. Ford, Phys. Rev. **95** (1954) 1250
9) A. W. Sunyar, Phys. Rev. **98** (1955) 653
10) G. M. Temmer et N. P. Heydenburg, Phys. Rev. **98** (1955) 1308
11) P. H. Stelson et F. K. Mc. Gowan, Phys. Rev. **99** (1955) 112
12) F. Coester, Phys. Rev. **99** (1955) 170
13) J. Lipkin, A. de Shalit et I. Talmi, Nuovo Cimento **2** (1955) 773
14) T. Marumori, J. Yukawa et R. Tanaka, Progr. Theor. Phys. **13** (1955) 442, 557
15) J. Schwinger, On angular momentum, NYO-3071 (1952)
16) D. R. Inglis, Phys. Rev. **96** (1954) 1059
17) J. Yoccoz, Thèse Paris (1956)

Nuclear Physics **2** (1956/57) 526—532; *North-Holland Publishing Co., Amsterdam*

CHARACTERISTIC X-RAYS PRODUCED BY PROTONS OF 0.2 TO 1.6 MeV ENERGY

J. M. HANSTEEN and S. MESSELT
Department of Physics, University of Oslo, Blindern, Norway

Received 12 October 1956

Abstract: The total thick target yield of X-rays excited by 0.2 to 1.6 MeV protons has been measured for Cu and Mo using a NaI scintillation spectrometer. The corresponding cross sections for K-shell ionization have been determined. For the lowest proton energies these values are smaller than the theoretical ones by a factor of 10—13, the ratio between theory and experiment decreasing to 1 for the highest energies.

1. Introduction

The possibility of producing X-rays by impact of a heavy particle (proton, deuteron, alpha particle) on matter was discovered by Chadwick in 1913. Since that time various experimenters have investigated this effect for several elements and bombarding energies [1, 2]). The X-rays were detected by Geiger counters and ionization chambers, and the estimated cross sections for ionization showed qualitatively agreement with calculations by Henneberg [3]).

Recently, however, the scintillation counter, offering several advantages, has come into use as detector [1, 4, 5]). Lewis *et al.* [1]) and Bevington and Bernstein [5]), using Fe, Mo and heavier elements and 1.5—4 MeV protons found good agreement with theory for the light elements and lowest proton energies. However, higher proton energies and heavier elements gave cross sections greater than predicted by theory.

The scintillation spectrometer can now be used as detector for X-rays with energies down to a few keV. It should therefore be possible to use several of the lighter elements and quite low proton energies to check the theory more carefully also in this region. Very few absolute measurements of the K ionization cross section have been performed in this low energy region [6]), and no measurements seem to have been done with the scintillation detector. In the present work with copper and molybdenum targets we have

found large differences between our data and the theoretical cross sections for proton energies below 0.5 MeV.

2. Experimental Arrangement

The thick target was placed at an angle of 45° to the proton beam from the Van de Graaff accelerator. X-rays produced in the target passed through a 0.012 cm thick aluminium side window and were detected by a scintillation counter placed perpendicularly to the proton beam. The distance between target and detector had to be varied from 4 cm to 51 cm to obtain a suitable counting rate at the different proton energies. The NaI(Tl) scintillator of diameter 1.24 cm and height 1.47 cm was mounted directly on an E.M.I. 6260 photomultiplier, the window in front of the scintillator being a 0.001 cm aluminium foil.

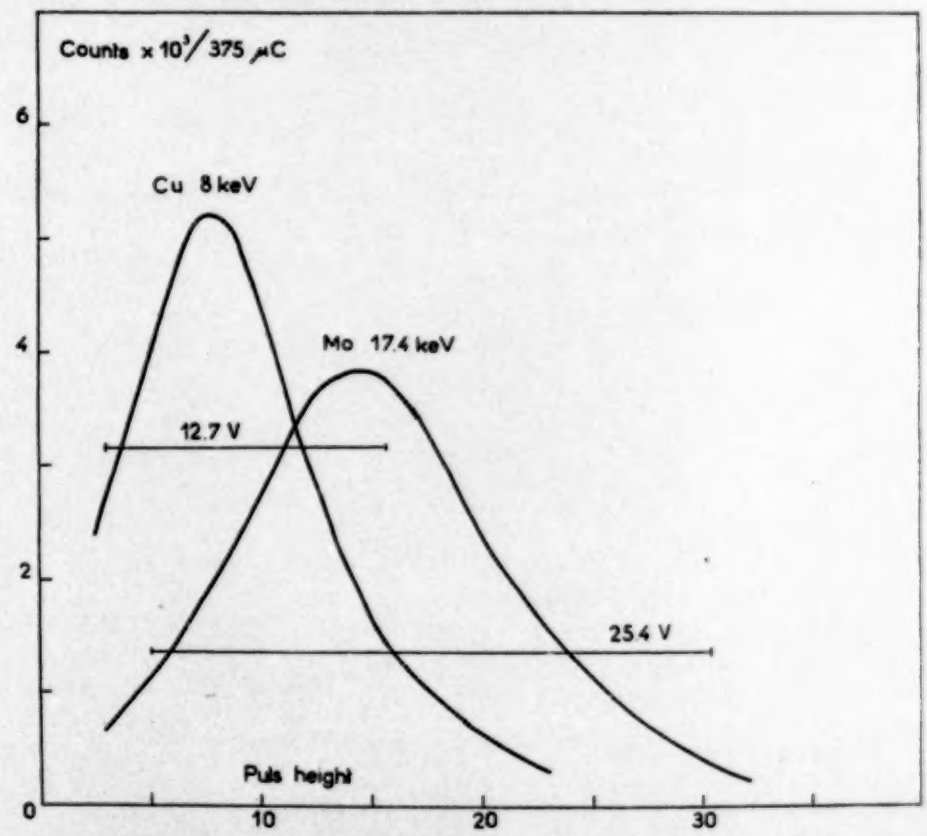

Fig. 1. Typical differential pulse-height spectra of the K-shell X-rays from Cu and Mo.

Pulses produced in the phototube by single X-rays photons, were amplified and fed into a single-channel pulse-height analyzer. Typical curves of counting rate against pulse-height are shown

in fig. 1. Tube noise, which began to rise at about 5 Volts on the scale, overlapped a part of the tail of the Cu curve.

The X-rays interact with the scintillator primarily by the photoelectric effect. Bernstein and Lewis [4]) have calculated the number I of iodine X-rays which escape if I_0 photons are incident on the scintillator. Their expression gives $I = 0.018\ I_0$ for Cu and $I = 0.003\ I_0$ for Mo. Thus any effect due to escape can be neglected.

After measuring several differential counting curves, the discriminator was set to record the counting rate in a 12.7 V channel in the case of Cu, and a 25.4 V channel in the case of Mo. These channels (shown in fig. 1) covered respectively 86 and 92 percent of the total area under the differential counting curves. In this way the total counting rate was measured as a function of the proton energy.

The absorption in Al of the radiation detected in these channels was also measured and showed good agreement with the values of Allen [7]).

3. Experimental Results

From a knowledge of the total number of counts per N incident protons, the yield of X-rays could be found after applying correc-

TABLE 1

Yield of K-shell X-rays and ionization cross sections

1 Element	2 Proton energy (MeV)	3 I_μ	4 σ (cm²)	5 σ_K (cm²)	6 σ_{th} (cm²)	7 σ_{th}/σ_K
$_{29}$Cu	0.2	4.50×10^{-9}	0.45×10^{-26}	1.2×10^{-26}	1.5×10^{-25}	13
	0.25	2.02×10^{-8}	1.0	2.6	3.3	13
	0.3	5.87	2.1	5.4	6.6	12
	0.35	1.31×10^{-7}	4.0	1.0×10^{-25}	1.1×10^{-24}	11
	0.4	2.91	8.5	2.2	1.7	7.7
	0.46	6.20	2.0×10^{-25}	5.1	2.5	4.9
	0.7	2.42×10^{-5}	2.0×10^{-24}	5.1×10^{-24}	9.3	1.8
	1.0	1.30×10^{-4}	8.6	2.2×10^{-23}	2.6×10^{-23}	1.2
	1.215	3.21	1.6×10^{-23}	4.1	4.2	1.0
$_{42}$Mo	0.25	3.66×10^{-10}	1.9×10^{-28}	2.7×10^{-28}	2.9×10^{-27}	11
	0.3	1.16×10^{-9}	5.5	7.7	5.9	7.8
	0.35	3.16	1.6×10^{-27}	2.2×10^{-27}	1.1×10^{-26}	4.5
	0.4	9.20	3.3	4.6	1.8	3.9
	0.7	1.25×10^{-7}	6.5×10^{-26}	9.1×10^{-26}	1.4×10^{-25}	1.5
	1.0	9.36	2.3×10^{-25}	3.2×10^{-25}	4.3	1.3
	1.215	6.53×10^{-6}	4.4	6.2	7.6	1.2
	1.61	2.47×10^{-5}	1.2×10^{-24}	1.7×10^{-24}	1.8×10^{-24}	1.1

tions for the solid angle and absorption in the Al-windows and air. The thick target yield I_μ per incident proton of energy E and range x_0 is related to the cross section $\sigma[E(x)]$ for ionization with K-shell X-ray emission by

$$I_\mu(x_0) = n\varrho \int_0^{x_0} e^{-\mu(x_0-x)}\, \sigma[E(x)]\,dx. \qquad (1)$$

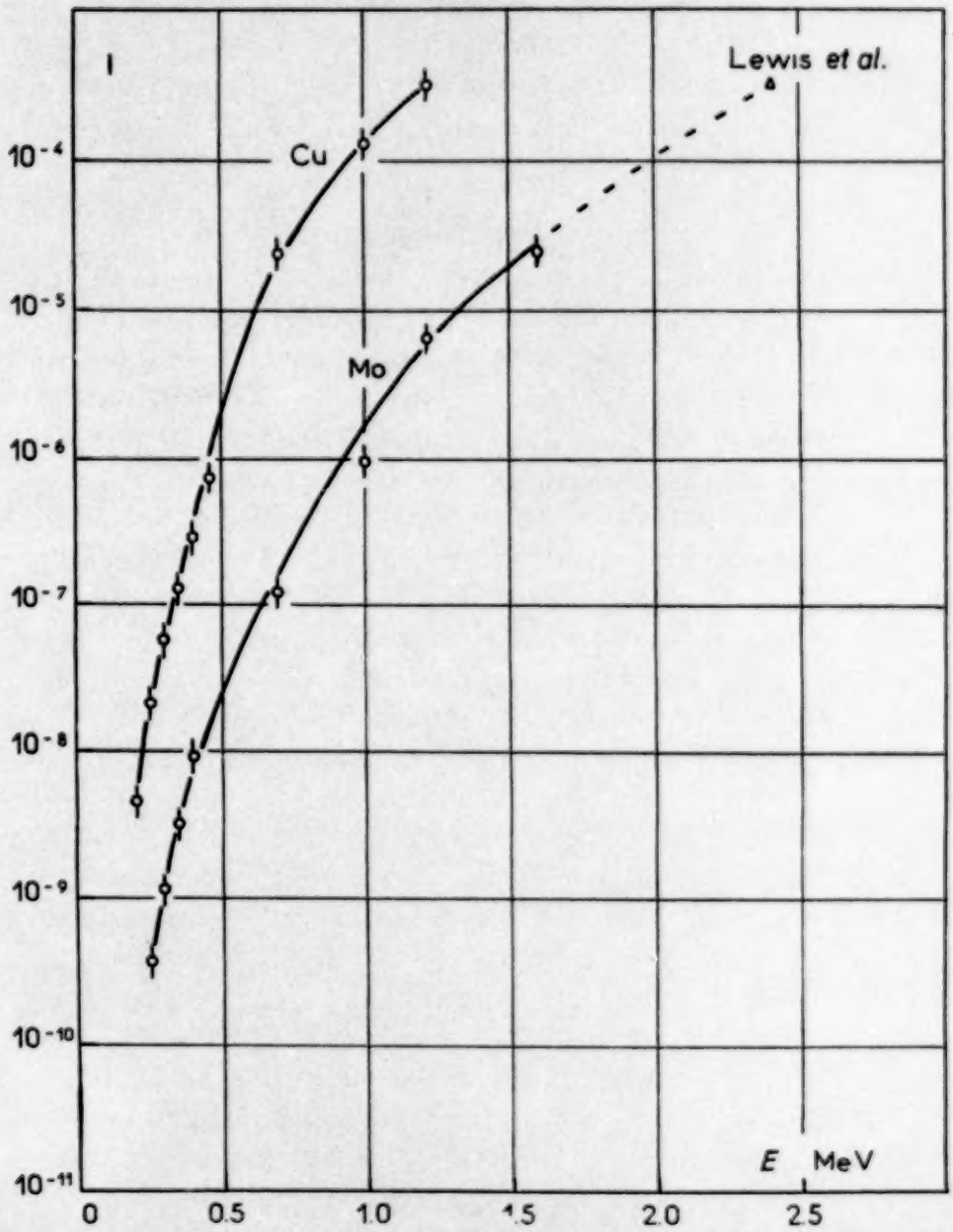

Fig. 2. Thick target yield I_μ^i of X-rays per proton of initial energy E.

Here n denotes the number of target atoms per gram, ϱ the density of the target material and μ the average absorption coefficient

of the target for its own characteristic X-radiation. The values of I_μ are shown in column 3 of table 1 and in fig. 2. In fig. 2 is also shown a measurement for Mo by Lewis *et al.* at 2.4 MeV.

Eq. (1) gives

$$\sigma[E(x)] = \frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}I_\mu(x)}{\mathrm{d}E}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}(\varrho x)} + \frac{\mu}{n\varrho}I_\mu(x). \qquad (2)$$

Values for $\mathrm{d}E/\mathrm{d}(\varrho x)$, the stopping power of the target material were taken from Allison and Warshaw [8]). The values for Mo were obtained by interpolating between Cu, Ag and Au. The computed cross sections are listed in column 4, table 1.

4. Discussion

Before comparing with the theory, we have to multiply the measured cross sections with the Auger factors 2.56 for Cu and 1.40 for Mo [9]). The resulting cross sections σ_K for K-shell ionization are listed in column 5 of table 1. The corresponding theoretical values are listed in column 6. These are calculated from Henneberg's formula as given in ref. [1]), using $\theta = 0.80$ for Cu and $\theta = 0.85$ for Mo. The theoretical and experimental cross sections for K-shell ionization in Cu and Mo are also plotted as a function of the proton energy in fig. 3. The cross section for Mo at 2.4 MeV obtained by Lewis *et al.* is also shown. The extrapolated curve in agreement with their value is based on the extrapolated values for I_μ as shown in fig. 2. The ratio between theoretical and experimental cross sections is listed in column 7, table 1. Henneberg's formula as given by Hansteen [10]) gives larger values than those listed in table 1.

The largest source of error in the experiment is in determining the value of I_μ, and is estimated to be of the order of 25 percent. These errors are shown in fig. 2.

From table 1 and fig. 3 it is seen that there are very large differences between our data and the theoretical cross sections for proton energies below 0.5 MeV. For increasing energy the theoretical and experimental values converge. For the higher energies used by Lewis *et al.* they diverge again, the theoretical expression now giving the smallest values. However, it can be mentioned that this work and the measurements by Lewis *et al.* cover about the same interval for the quantity $\eta' = 4mE/M\Theta E_K$. M/m is the ratio of the mass of the heavy incident particle to the mass of the electron and Θ the ratio of the observed K-shell ionization energy E_K to

the "ideal ionization energy in the absence of outer screening". Lewis *et al.* obtained better agreement with the theory using lower, relativistic values for the screening factor, but this would increase

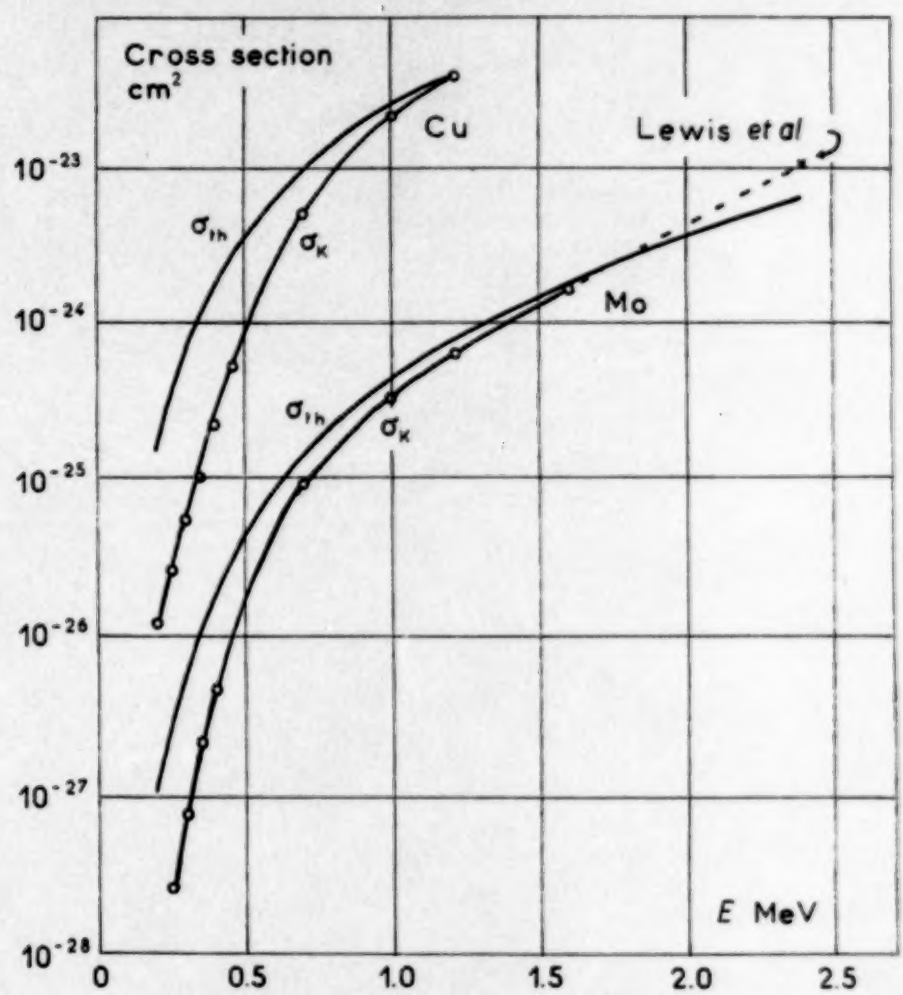

Fig. 3. Theoretical and experimental cross sections for K-shell ionization in Cu and Mo vs. proton energy.

the discrepancy in the present work. But even setting $\Theta = 1$ would not fit the experimental points at the lowest energies with the theory. We are therefore inclined to conclude that the discrepancy must be due to approximations in the theory. Treating the nucleus as a point charge and using non-relativistic wave functions for the K-electrons may perhaps introduce considerable errors. A further investigation of the low proton energy region seems desirable, and our measurements will be continued.

It is a pleasure to acknowledge the assistance of S. Andersen, R. Jahren and O. Lönsjö and the financial support given by the Royal Norwegian Council for Scientific and Industrial Research.

References

1) H. W. Lewis, B. E. Simmons and E. Merzbacher, Phys. Rev. **91** (1953) 943
2) J. Urbanec and Č. Šimaně, Czech. Journ. of Phys. **5** (1955) 40
3) W. Henneberg, Z. Physik **86** (1933) 592
4) E. M. Bernstein and H. W. Lewis, Phys. Rev. **95** (1954) 83
5) P. R. Bevington and E. M. Bernstein, Bull. Am. Phys. Soc., Ser. II, **1** (1956) 198
6) O. Peter, Ann. Physik **27** (1936) 299
7) S. J. Allen, Handbook of Chem. and Phys., 34th ed. (Chemical Rubber Publ. Co.) p. 2235
8) S. K. Allison and S. D. Warshaw, Rev. Mod. Phys. **25** (1953) 779
9) C. E. Roos, Phys. Rev. **100** (1955) 1267
10) J. M. Hansteen, Archiv for Math. og Naturvid. **53** (1956) 95

Nuclear Physics **2** (1956/57), 533—547; *North-Holland Publishing Co., Amsterdam*

CALCULATIONS IN NUCLEAR SPECTROSCOPY WITH THE HARMONIC OSCILLATOR SHELL MODEL

R. THIEBERGER

Department of Physics, The Weizmann Institute of Science, Rehovoth and The Israel Atomic Energy Commission, Tel Aviv

Received 16 August 1956

Abstract: A summary of the results and methods in the use of harmonic oscillator wave functions in nuclear spectroscopy is presented.

In the last few years the method of harmonic oscillator wave functions [1]) has been extensively used. It seems to us worthwhile to publish a summary of the technical results obtained here as well as elsewhere. In order to make this note complete we include some material and results contained in ref. [1]).

The usual way of treating energy levels in atomic spectroscopy was developed by Slater. The two body potential is expanded in a series of Legendre polynomials. The integration over the angle variables of the nucleons is carried out, and the final result is a sum of radial integrals. This angular integration is the subject of all the recent spectroscopial methods (developed by Racah and others). The mathematical evaluation of the radial integrals is the subject of this note.

The form of these radial integrals is

$$R^k(a_1, a_2, b_1, b_2) = \iint R_{a_1}(r_1) R_{a_2}(r_2) f_k(r_1, r_2) R_{b_1}(r_1) R_{b_2}(r_2) \mathrm{d}r_1 \mathrm{d}r_2 \quad (1)$$

where $R_i(r)$ are the radial parts of the wave functions, r_1 and r_2 are the co-ordinates of the first and second particle, $f_k(r_1, r_2)$ are the coefficients in the expansion of the two body potential in Legendre Polynomials:

$$V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(r_1, r_2) P_k(\cos \omega_{12}),$$

$$f_k(r_1, r_2) = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) P_k(\cos \omega_{12}) \, \mathrm{d}\cos \omega_{12}$$

where ω_{12} is the angle between $\mathbf{r}_1$ and $\mathbf{r}_2$. We will consider only

two types of integrals (the most important):

$$F^k(a_1, a_2) = R^k(a_1a_2a_1a_2),\ G^k(a_1, a_2) = R^k(a_1a_2a_2a_1).$$

In nuclear spectroscopy it is in most cases impossible to evaluate the F^k, G^k from measured energy levels. Therefore the radial integrals ought to be mathematically evaluated, and it is useful to have the form of the potential remain undetermined to the last stage of the calculations.

In order to utilize the method developed by Talmi we must use a special form of the single nucleon wave functions, the harmonic oscillator wave functions. These wave functions are determined from the potential

$$V(r) = \tfrac{1}{2}m\omega^2r^2 = \hbar\omega\nu r^2 \qquad (2)$$

which defines † ν, and are $\psi(r, \theta, \varphi) = (R(r)/r)\,Y_l^{(m)}(\theta, \varphi)$, where the radial part is $R_{nl}(r) = N_{nl}\exp(-\nu r^2)r^{l+1}V_{nl}(r)$. The normalization factor N_{nl} is defined by

$$N_{nl}^2 = \frac{2^{l-n+2}(2l+2n+1)!!(2\nu)^{l+\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}n!\,[(2l+1)!!]^2}$$

and V_{nl} is an associated Laguerre polynomial: $V_{nl}(r) = L_{n+l+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(2\nu r^2)$.

The first few functions are

for $n = 0$: $R_l(r) = N_l\,e^{-\nu r^2}r^{l+1}$, $\qquad N_l^2 = \dfrac{(2\nu)^{l+\frac{3}{2}}2^{l+2}}{\sqrt{\pi}(2l+1)!!}$;

for $n = 1$: $V_{1l} = 1 - \dfrac{8\nu}{2l+3}r^2$, $\qquad N_{1l}^2 = \dfrac{(2\nu)^{l+\frac{3}{2}}2^{l+1}(2l+3)}{\sqrt{\pi}(2l+1)!!}$;

for $n = 2$: $V_{2l} = 1 - \dfrac{8\nu}{2l+3}r^2 + \dfrac{16\nu^2}{(2l+3)(2l+5)}r^4$,

$$N_{2l}^2 = \frac{(2\nu)^{l+\frac{3}{2}}2^l(2l+3)(2l+5)}{\sqrt{\pi}(2l+1)!!}.$$

To evaluate the F^k, G^k one makes use of the fact that the interaction energy depends only on the relative co-ordinate $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. The procedure is to express also the wave functions as a function of $\mathbf{r}$, the co-ordinate of the centre of mass of the two nucleons,

† This definition corresponds to that of ref. [2]). It is used in all but part I of ref. [1]). In part I of ref. [1]) the ν defined is twice our ν.

$\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)$, and the angle α between $\mathbf{r}$ and $\mathbf{R}$. The integration over R and α can be performed immediately, and we are left with integrals over r, which alone contain the yet undetermined potential. These integrals can be expressed in the form

$$I_p = \int_0^\infty R_p^2(r) V(r)\,\mathrm{d}r. \tag{3}$$

In order to perform the transformation from the $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, ω_{12} variables to $\mathbf{r}$, $\mathbf{R}$ and α, one needs the following relations:

$$r_1^2+r_2^2 = \frac{4R^2+r^2}{2},$$

$$r_1^2 r_2^2 = \left(\frac{4R^2-r^2}{4}\right)^2 + R^2r^2\sin^2\alpha, \tag{4}$$

$$r_1^k r_2^k P_k(\cos\omega_{12}) = \sum_{n=0}^{m} C_{2n}\left(\frac{4R^2-r^2}{4}\right)^{2n}\left[\left(\frac{4R^2-r^2}{4}\right)^2 + R^2r^2\sin^2\alpha\right]^{m-n} \quad (k=2m),$$

$$r_1^2\mathrm{d}r_1 r_2^2\mathrm{d}r_2\,\mathrm{d}\cos\omega_{12} = R^2\mathrm{d}R r^2\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\cos\alpha,$$

where the C_{2n} are defined by $P_k(\cos\omega_{12}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}\cos^{2n}\omega_{12}$.
With the help of these relations the expression for F^k (for example),

$$F^k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{+1}\int_0^\infty\int_0^\infty V(|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|)\frac{R_{a1}^2(r_1)}{r_1^2}\frac{R_{a2}^2(r_2)}{r_2^2}P_k(\cos\omega_{12})\,r_1^2\mathrm{d}r_1 r_2^2\mathrm{d}r_2, \tag{5}$$

becomes

$$F^k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{+1}\int_0^\infty\int_0^\infty V(r)\varphi_k(R,r,\alpha)R^2\mathrm{d}R r^2\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\cos\alpha; \tag{6}$$

here φ_k is the transform of $(R_{a1}^2(r_1)/r_1^2)(R_{a2}^2(r_2)/r_2^2)\,P_k(\cos\omega_{12})$, and is a polynomial in r, R and $\sin^2\alpha$ multiplied by $\exp[-\nu(4R^2+r^2)]$.

It may sometimes become necessary to assume that the two nucleons move in different harmonic oscillator wells. That means that the first nucleon moves in a well characterized by ν_1 and the second nucleon moves in a well characterized by ν_2. In this case the centre of mass co-ordinate can be modified, and expressed as $\mathbf{R} = (\nu_1\mathbf{r}_1+\nu_2\mathbf{r}_2)/(\nu_1+\nu_2)$, the second co-ordinate $\mathbf{r}$ remains unaltered. The relations corresponding to the transformation are given as follows:

$$\nu_1 r_1^2+\nu_2 r_2^2 = (\nu_1+\nu_2)R^2+\frac{\nu_1\nu_2}{\nu_1+\nu_2}r^2,$$

$$r_1^2+r_2^2 = 2R^2+2\frac{\nu_1-\nu_2}{\nu_1+\nu_2}(\mathbf{r},\mathbf{R})+\frac{\nu_1^2+\nu_2^2}{(\nu_1+\nu_2)^2}r^2,$$

$$r_1^2 r_2^2 = R^4+2\frac{\nu_1-\nu_2}{\nu_1+\nu_2}rR^3\cos\alpha+\frac{\nu_1+\nu_2}{(\nu_1+\nu_2)^2}r^2R^2-4\frac{\nu_1\nu_2}{(\nu_1+\nu_2)^2}r^2R^2\cos^2\alpha$$
$$+\frac{2\nu_1\nu_2(\nu_2-\nu_1)}{(\nu_1+\nu_2)^3}r^3R\cos\alpha_i+\frac{\nu_1^2\nu_2^2}{(\nu_1+\nu_2)^4}r^4. \qquad (7)$$

In most cases it is not necessary to use these complicated formulae. A good approximation for the F^k is $\frac{1}{2}\nu = \nu_1\nu_2/(\nu_1+\nu_2)$ and the G^k can always be calculated with $\nu = \frac{1}{2}(\nu_1+\nu_2)$.

When performing calculations with $n \neq 0$ it is convenient to reduce the integrals F^k and G^k to a sum of several integrals which belong to wave functions with $n = 0$, with different normalization coefficients. As an example in the case of $(1d)^2$ we obtain

$$F^k(1d^2) = \tfrac{49}{4}F^k(0d^2)-49F^k(0d0f)+\tfrac{63}{2}F^k(0d0g)$$
$$+49F^k(0f^2)-63F^k(0f0g)+\tfrac{81}{4}F^k(0g^2).$$

Instead of calculating the F^k, G^k by integration, as described above, one can use two formulae, given in ref. [3, 4]), expressing the radial integrals in terms of algebraic expressions. We will describe here another formula found empirically by Racah [5]) for $(0l)^2$ configurations. We prove this formula in Appendix A. In Appendix B we show how the method can be used for more general cases.

These formulae give the F^k apart from normalization. The normalization coefficient can be simply calculated as will be shown below. The simplest case is the calculation of F^k for the maximum k, i.e., $k = 2l$. In this case the coefficients of the I_p are simply the binomial coefficients of $(a-b)^{2l}$:

$$F^{2l} \propto \sum_p (-1)^p \binom{2l}{p} I_p.$$

The second simplest case is $k = 2l-2$. We have here in addition to the binomial coefficients of $(a-b)^{2l}$ also those of $(a-b)^{2l-2}$ multiplied by a factor:

$$F^{2l-2} \propto \sum_p \left[(-1)^p\binom{2l}{p}+4\frac{4l-1}{4l+1}(-1)^{p-1}\binom{2l-2}{p-1}\right] I_p.$$

For the general case we have

$$F^{2l-2m} \propto \sum_p \left[(-1)^p \binom{2l}{p} + 4 \frac{4l-2m+1}{4l+1} (-1)^{p-1} \binom{2l-2}{p-1} \binom{m}{m-1} \right.$$

$$+ 4^2 \frac{(4l-2m+1)(4l-2m-1)}{(4l+1)(4l-1)} (-1)^{p-2} \binom{2l-4}{p-2} \binom{m}{m-2}$$

$$\left. + 4^3 \frac{(4l-2m+1)(4l-2m-1)(4l-2m-3)}{(4l+1)(4l-1)(4l-3)} (-1)^{p-3} \binom{2l-6}{p-3} \binom{m}{m-3} + \ldots \right] I_p. \quad (8)$$

We see immediately that the coefficients of I_p equal the one of I_{2l-p}, therefore it is sufficient to calculate the coefficients of $I_0, I_1, \ldots I_l$.

For the actual calculation a useful procedure is as follows. One writes the binomial coefficients in one triangle (see example). The first row contains the coefficients of $(a-b)^{2l}$, the second those of $(a-b)^{2l-2}$, etc. The first column (from the left) will give the coefficient of I_0, the second that of I_1, etc., the last column will give the coefficient of I_l. The factors multiplying these binomial coefficients appear in a second triangle. The first column is used to get F^{2l}, the second for F^{2l-2}, the last for F^0.

The first row contains the factors multiplying $(-1)^p \binom{2l}{p}$ (these are always 1), the second contains the factors of $(-1)^{p-1} \binom{2l-2}{p-1}$ etc. To get any F^k we multiply the row corresponding to k in the factor triangle by the binomial coefficients triangle so that the element in the row corresponding to $(-1)^{p-i} \binom{2l-2i}{p-i}$ in the factors triangle multiplies the i-th row in the binomial coefficients triangle. Adding the resulting rows one gets for each column corresponding to p the coefficient of I_p.

As an example of $(0l)^2$ configuration calculations, we consider $(0h)^2$:

I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
1	−10	45	−120	210	−252
	1	−8	28	−56	70
		1	−6	15	−26
			1	−4	6
				1	−2
					1

$k=10$	$k=8$	$k=6$	$k=4$	$k=2$	$k=0$
1	1	1	1	1	1
	$\frac{4\cdot 19}{21}$	$\frac{8\cdot 17}{21}$	$\frac{12\cdot 15}{21}$	$\frac{16\cdot 13}{21}$	$\frac{20\cdot 11}{21}$
		$\frac{16\cdot 17\cdot 15}{21\cdot 19}$	$\frac{48\cdot 15\cdot 13}{21\cdot 19}$	$\frac{96\cdot 13\cdot 11}{21\cdot 19}$	$\frac{160\cdot 11\cdot 9}{21\cdot 19}$
			$\frac{64\cdot 15\cdot 13\cdot 11}{21\cdot 19\cdot 17}$	$\frac{256\cdot 13\cdot 11\cdot 9}{21\cdot 19\cdot 17}$	$\frac{640\cdot 11\cdot 9\cdot 7}{21\cdot 19\cdot 17}$
				$\frac{256\cdot 13\cdot 11\cdot 9\cdot 7}{21\cdot 19\cdot 17\cdot 15}$	$\frac{1280\cdot 11\cdot 9\cdot 7\cdot 5}{21\cdot 19\cdot 17\cdot 15}$
					$\frac{1024\cdot 11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}{21\cdot 19\cdot 17\cdot 15\cdot 13}$

To calculate F^8 we have to take

(I_0+I_{10})	(I_1+I_9)	(I_2+I_8)	(I_3+I_7)	(I_4+I_6)	I_5
1.1	−10.1	45.1	−120.1	210.1	−252.1
	$1\frac{4\cdot 19}{21}$	$-8\frac{4\cdot 19}{21}$	$28\frac{4\cdot 19}{21}$	$-56\frac{4\cdot 19}{21}$	$70\frac{4\cdot 19}{21}$

The G^k for any configuration $(0l0l')$ can be handled according to this formula. This results from the fact that the powers of r_1 and r_2 in the integrals G^k are equal. The only difference is that the maximal k is not $2l$ but $l+l'$.

The simplest checks which can be used are obtained when taking the short range and long range limits. In the long range limit all the I_p are equal and then $F^0 = I_0$ and all the other F^k and all the G^k are zero. For the short range we get that only $I_0 \neq 0$ and then $G^k = F^k = (2k+1)F^0$. These results can be used for calculating the normalization factor for F^0 because then $F^0 = I_0$. When we put $I_p = 0$ for $p = 0$ we can derive from $F^k = (2k+1)F^0$ the normalization factors for all the F^k, G^k.

Another check on the results is to take a two-body potential of the form $V(r) = r^{2n}$. For such a potential it is easy to calculate directly the F^k, G^k and compare the results with those obtained by inserting the values of I_p into the formulas which are to be checked.

In Appendix C we give some results of the Slater integrals as functions of Talmi integrals. To make this appendix more complete we added the results from ref. [1]), and other sources [4, 6]).

We conclude with some results on the actual calculation of the I_p for several important potentials.

(a) For the Gaussian potential

$$V(r) = Ve^{-r^2/r_0^2}: \; I_p = V\left(\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^{p+3/2} \quad (\lambda = r_0\nu^{1/2}).$$

(b) For the potential

$$V(r) = V\frac{e^{-r^2/r_0^2}}{r/r_0},$$

which gives in the limit $r_0 \to \infty$ the Coulomb potential:

$$I_p = V\lambda\frac{p!}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^{p+1}\frac{2^{p+1}}{(2p+1)!!}.$$

(c) For the potential

$$V(r) = V\frac{e^{-r^2/r_0^2}}{r^2/r_0^2} : I_p = V\lambda^2 \frac{2}{2p+1}\left(\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^{p+1/2}.$$

(d) For the Yukawa potential

$$V(r) = V\frac{e^{-r/r_0}}{r/r_0},$$

Longdon [7]) showed that the I_p can be expressed by Hh_{2p+1} functions [8]):

$$I_p = V\frac{2^{p+1}}{\sqrt{\pi}}p!\ \frac{e^{\mu^2}}{2\mu}Hh_{2p+1}(\sqrt{2\mu}). \tag{9}$$

A simple method, based on the latter relation, particularly adequate for higher p's and greater accuracy, is the following. The first I_p are [1])

$$I_0 = V\lambda\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} - 2\mu(1-\phi(\mu))e^{\mu^2}\right],$$

$$I_1 = \tfrac{2}{3}V\lambda\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}(1+\mu^2) - 2\mu(\tfrac{3}{2}+\mu^2)(1-\phi(\mu)\,e^{\mu^2}\right],$$

where

$$\mu = \frac{1}{2\lambda},\ \phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

To obtain the I_p with higher p a recursion formula of the Hh_{2p+1} functions [9]) can be used. This gives the following recursion formula for the I_p:

$$I_{p+1} = \frac{2p}{2p+3}\left[\left(2+\frac{2\mu^2+3}{2p}\right)I_p - I_{p-1}\right].$$

The author wishes to thank Dr. I. Talmi for suggesting this work and for his constant guidance. It is a pleasure to thank Professor G. Racah for discussions concerning the proof of his empirical formula, and Dr. A. DeShalit for his stimulating interest.

Appendix A

We prove here the formula for calculating F^k in the case of $(0l)^2$ configurations. We prove it first for F^{2l} and then by induction for every F^k. In appendix B we generalize the formula for $(0l0(l+1))$ configurations and show how more complicated cases can be dealt

with. We do not consider normalization coefficients as these can be simply calculated as indicated in the text.

For F^k with $k = 2l = s$ we have

$$F^s\alpha \int r_1^s r_2^s P_s(\cos\omega_{12}) e^{-2\nu(r_1^2+r_2^2)} V(r) r_1^2 \mathrm{d}r_1 r_2^2 \mathrm{d}r_2 \,\mathrm{d}\cos\omega_{12}. \quad \text{(A1)}$$

The first step is [10]) to develop the integrand in a series in $\sin\alpha$:

$$\begin{aligned}\frac{P_s(\cos\omega_{12})}{\cos^s\omega_{12}} &= F(-\tfrac{1}{2}s, \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}s, 1, -\mathrm{tg}^2\omega_{12}) \\ &= F\left(-\tfrac{1}{2}s, \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}s, 1, -\frac{R^2r^2}{(R^2-\frac{1}{4}r^2)^2}\sin^2\alpha\right) \quad \text{(A2)} \\ &= \sum_n \frac{s!!(s-1)!!}{2^{2n}(s-2n)!!(s-2n-1)!!n!^2}(-1)^n\left(\frac{R^2r^2}{(R^2-\frac{1}{4}r^2)^2}\right)^n \sin^{2n}\alpha\end{aligned}$$

where F is the hypergeometric function. As $r_1^s r_2^s \cos^s\omega_{12} = (R^2-\frac{1}{4}r^2)^s$ is independent of α we can now integrate over α, and since $\int_{-1}^{1}\sin^{2n}\alpha \,\mathrm{d}\cos\alpha = 2^{n+1}\,n!/(2n+1)!!$, we obtain

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(R^2-\tfrac{1}{4}r^2)^s \frac{P_s(\cos\omega_{12})}{\cos^s\omega_{12}}\mathrm{d}\cos\alpha \propto \sum_n (-1)^n \frac{s!}{(s-2n)!(2n+1)!} \\ \cdot 2^{2n+1}R^{2n}\left(\frac{r}{2}\right)^{2n}(R^2-\tfrac{1}{4}r^2)^{s-2n}. \quad \text{(A3)}\end{aligned}$$

We expand $(R^2-\frac{1}{4}r^2)^{s-2n}$ and introducing $p = n + l$, we obtain the coefficient of $R^{2s-2p}(\frac{1}{2}r)^{2p}$ as

$$\begin{aligned}&(-1)^p\sum_n 2^{2n+1}\frac{s!\binom{s-2n}{p-n}}{(s-2n)!(2n+1)!} \\ &\quad = (-1)^p\sum_n\left(\sum_r\binom{2n+1}{n+r}\right)\frac{s!\binom{s-2n}{p-n}}{(s-2n)!(2n+1)!} \quad \text{(A4)} \\ &\quad = (-1)^p\sum_{n,r}\frac{s!}{(p-n)!(s-n-p)!(n+r)!(n-r+1)}.\end{aligned}$$

This double summation can be carried out and (A3) becomes equal to

$$(-1)^p\frac{(2s+1)!}{(2p+1)!(2s-2p+1)!}.$$

Now we can carry out the integration over R and express the ntegral over r in terms of the I_p:

$$\int R^{2s-2p+2} e^{-4\nu R^2} dR \int \left(\frac{r}{2}\right)^{2p} e^{-\nu r^2} r^2 dr$$

$$= \frac{(2s-2p+1)!!}{2^{s-p+2}(4\nu)^{s-p+1}} \sqrt{\frac{\pi}{4\nu}} \cdot \frac{I_p}{2^{2p} N_p^2(\nu)} \propto \frac{(1+2p)!!(2s-2p+1)!!}{(2s+1)!!} I_p.$$

Thus we get for the coefficients of I_p the desired expression

$$(-1)^p \frac{(2s+1)!}{(2p+1)!(2s-2p+1)!} \cdot \frac{(2p+1)!!(2s-2p+1)!!}{(2s+1)!!} \propto (-1)^p \binom{s}{p}.$$

We now assume that the formula holds for F^{s-2m} and prove it for F^{s-2m-2}. To do this we use the recursion formula of the Legendre polynomials

$$(s-2m-1) P_{s-2m-2}(\cos \omega_{12})$$
$$= (2s-4m-1) \cos \omega_{12} P_{s-2m-1}(\cos \omega_{12}) - (s-2m) P_{s-2m}(\cos \omega_{12}). \quad \text{(A5)}$$

Using this formula we have to calculate only the following integral

$$\int (r_1 r_2 \cos \omega_{12}) r_1^{s-1} r_2^{s-1} P_{s-1-2m}(\cos \omega_{12})$$
$$e^{-2\nu(r_1^2+r_2^2)} V(r) r_1^2 dr_1 r_2^2 dr_2 d\cos \omega_{12}. \quad \text{(A6)}$$

To calculate (A6) we write $r_1 r_2 \cos \omega_{12} = R^2 - \frac{1}{4} r^2$. According to our assumption we know the expression for

$$r_1^{s-1} r_2^{s-1} P_{s-1-2m}(\cos \omega_{12}) \quad \text{(A7)}$$

in terms of R and r. The integration over R can be readily done and the term containing r^s in (A7) gives

$$(-1)^p I_p \frac{1}{2s+1} \left[\binom{s-1}{p} (2s-2p+1) \right.$$
$$\left. - \frac{4(2s-2m-1)}{(2s-1)} \binom{s-3}{p-1} \binom{m}{m-1} (2s-2p+1) + \cdots \right]$$
$$- (-1)^p I_{p+1} \frac{1}{2s+1} \left[\binom{s-1}{p} (2p+3) \right.$$
$$\left. - \frac{4(2s-2m-1)}{(2s-1)} \binom{s-3}{p-1} \binom{m}{m-1} (2p+3) + \cdots \right].$$

Using:

$$\binom{s-1}{p} (2s-2p+1) + \binom{s-1}{p-1} (2p+1) = (2s+1) \binom{s}{p} - 4(s-1) \binom{s-2}{p-1}$$

and the recursion formula (A5) we get the desired expression for F^{s-2m-2}.

Appendix B

We now write the formula for the F^k in the case of $(0l0(l+1))$ configurations. For the maximum F^k we have

$$F^{2l} = F^s \propto \int r_1^{s+2} r_2^s P_s(\cos\omega_{12}) V(r) r_1^2 \mathrm{d}r_1 r_2^2 \mathrm{d}r_2 \mathrm{d}\cos\omega_{12}\, \mathrm{e}^{-2\nu(r_1^2+r_2^2)}$$

$$= \int (R^2+\tfrac{1}{4}r^2) r_1^s r_2^s P_s(\cos\omega_{12}) V(r) r_1^2 \mathrm{d}r_1 r_2^2 \mathrm{d}r_2 \mathrm{d}\cos\omega_{12}\, \mathrm{e}^{-2\nu(r_1^2+r_2^2)}.$$

As in appendix A we perform the integration over R and r. We thus obtain that the part containing I_p in

$$\int r_1^s r_2^s P_s(\cos\omega_{12}) V(r) r_1^2 \mathrm{d}r_1 r_2^2 \mathrm{d}r_2 \mathrm{d}\cos\omega_{12}\, \mathrm{e}^{-2\nu(r_1^2+r_2^2)}$$

becomes

$$(-1)^p \binom{s}{p} [(2s-2p+3)I_p + (2p+3)I_{p+1}].$$

Therefore the coefficient of I_p is

$$\binom{s}{p}(2s-2p+3) - \binom{s}{p-1}(2p+1) = (2s+3)\left[\binom{s}{p} - \binom{s}{p-1}\right].$$

We can here use the same method, with the following modifications. The binomial coefficients triangle now has elements of the form

$$\binom{k}{p} - \binom{k}{p-1},$$

and the factors different from 1 have in the denominator a factor larger by two than in the previous case. For example factors in the second row have now $(4l+3)$ in their denominators instead of $(4l+1)$. This is shown in the following example of the calculation of $F(^kfg)$:

1	−5	9	−5	1	1	1	1
	1	−3	2		$\frac{4\cdot 11}{15}$	$\frac{8\cdot 9}{15}$	$\frac{12\cdot 7}{15}$
		1	−1			$\frac{16\cdot 9\cdot 7}{15\cdot 13}$	$\frac{48\cdot 7\cdot 5}{15\cdot 13}$
			1				$\frac{64\cdot 7\cdot 5\cdot 3}{15\cdot 13\cdot 11}$

The configurations $(0l0(l+2))$ give rise to the following expressions:

$$\int r_1^{s+4} r_2^s P_{s-2m}(\cos\omega_{12}) V(r) r_1^2 \mathrm{d}r_1 r_2^2 \mathrm{d}r_2 \mathrm{d}\cos\omega_{12}\, \mathrm{e}^{-2\nu(r_1^2+r_2^2)}$$

$$= \int \{(r_1^2+r_2^2)^5 - 2r_1^2 r_2^2\} r_1^s r_2^s P_{s-2m} r_1^2 \mathrm{d}r_1 r_2^2 \mathrm{d}r_2 \mathrm{d}\cos\omega_{12}\, \mathrm{e}^{-2\nu(r_1^2+r_2^2)}.$$

The first part can be handled similarly to the above procedure, the second part is already known.

Appendix C

In the following expressions the Slater integrals are given in terms of the I_i in the cases treated here.

$(0s)^2$

$$F^0 = I_0$$

$(0p)^2$

$$F^0 = \frac{1}{12}\ [5(I_0+I_2)+2I_1]$$
$$F^2 = \frac{25}{12}\ [(I_0+I_2)-2I_1]$$

$(0d)^2$

$$F^0 = \frac{1}{240}\ [63(I_0+I_4)+28(I_1+I_3)+58I_2]$$
$$F^2 = \frac{7}{45}\ [9(I_0+I_4)-8(I_1+I_3)-2I_2]$$
$$F^4 = \frac{189}{80}\ [(I_0+I_4)-4(I_1+I_3)+6I_2]$$

$(0f)^2$

$$F^0 = \frac{1}{2240}\ [429(I_0+I_6)+198(I_1+I_5)+387(I_2+I_4)+212I_3]$$
$$F^2 = \frac{3}{448}\ [143(I_0+I_6)-66(I_1+I_5)-15(I_2+I_4)-124I_3]$$
$$F^4 = \frac{297}{2240}\ [13(I_0+I_6)-34(I_1+I_5)+19(I_2+I_4)+4I_3]$$
$$F^6 = \frac{5577}{2240}\ [(I_0+I_6)-6(I_1+I_5)+15(I_2+I_4)-20I_3]$$

$(0g)^2$

$$F^0 = \frac{1}{80640}\ [12155(I_0+I_8)+5720(I_1+I_7)+10868(I_2+I_6)+6248(I_3+I_5)+10658I_4]$$
$$F^2 = \frac{11}{16128}\ [1105(I_0+I_8)-260(I_1+I_7)+52(I_2+I_6)-764(I_3+I_5)-266I_4]$$
$$F^4 = \frac{143}{26880}\ [255(I_0+I_8)-480(I_1+I_7)+68(I_2+I_6)-32(I_3+I_5)+378I_4]$$
$$F^6 = \frac{1859}{16128}\ [17(I_0+I_8)-76(I_1+I_7)+116(I_2+I_6)-52(I_3+I_5)-10I_4]$$
$$F^8 = \frac{41327}{16128}\ [(I_0+I_8)-8(I_1+I_7)+28(I_2+I_6)-56(I_3+I_5)+70I_4]$$

$(0h)^2$

$$F^0 = \frac{1}{709632}\ [88179(I_0+I_{10})+41990(I_1+I_9)+78445(I_2+I_8)+46280(I_3+I_7)+76310(I_4+I_6)+47204I_5]$$
$$F^2 = \frac{13}{709632}\ [33915(I_0+I_{10})-3230(I_1+I_9)+5695(I_2+I_8)-17960(I_3+I_7)-6842(I_4+I_6)-23156I_5]$$
$$F^4 = \frac{13}{78848}\ [6783(I_0+I_{10})-9690(I_1+I_9)-765(I_2+I_8)-3480(I_3+I_7)+6270(I_4+I_6)+1764I_5]$$
$$F^6 = \frac{2873}{709632}\ [399(I_0+I_{10})-1406(I_1+I_9)+1363(I_2+I_8)-8(I_3+I_7)+286(I_4+I_6)-1268I_5]$$
$$F^8 = \frac{71383}{709632}\ [21(I_0+I_{10})-134(I_1+I_9)+337(I_2+I_8)-392(I_3+I_7)+154(I_4+I_6)+28I_5]$$
$$F^{10} = \frac{205751}{78848}\ [(I_0+I_{10})-10(I_1+I_9)+45(I_2+I_8)-120(I_3+I_7)+210(I_4+I_6)-252I_5]$$

$(0i)^2$

$$F^0 = \frac{1}{12300288}\,[1300075(I_0+I_{12})+624036(I_1+I_{11})+1153110(I_2+I_{10})+691220(I_3+I_9)$$
$$+1116645(I_4+I_8)+711240(I_5+I_7)+1107636I_6]$$

$$F^2 = \frac{25}{12300288}\,[260015(I_0+I_{12})+67830(I_2+I_{10})-103360(I_3+I_9)-32895(I_4+I_8)$$
$$-158784(I_5+I_7)-65612I_6]$$

$$F^4 = \frac{17}{4100096}\,[229425(I_0+I_{12})-256956(I_1+I_{11})-51870(I_2+I_{10})-163020(I_3+I_9)$$
$$+108735(I_4+I_8)+26760(I_5+I_7)+213852I_6]$$

$$F^6 = \frac{323}{946176}\,[4025(I_0+I_{12})-11592(I_1+I_{11})+7098(I_2+I_{10})+1496(I_3+I_9)+6039(I_4+I_8)$$
$$-6288(I_5+I_7)-1556I_6]$$

$$F^8 = \frac{5491}{1757184}\,[575(I_0+I_{12})-3036(I_1+I_{11})+5694(I_2+I_{10})-3692(I_3+I_9)-303(I_4+I_8)$$
$$-1464(I_5+I_7)+4452I_6]$$

$$F^{10} = \frac{52003}{585728}\,[25(I_0+I_{12})-208(I_1+I_{11})+730(I_2+I_{10})-1360(I_3+I_9)+1335(I_4+I_8)-480(I_5+I_7)$$
$$-84I_6]$$

$$F^{12} = \frac{4643125}{1757184}\,[(I_0+I_{12})-12(I_1+I_{11})+66(I_2+I_{10})-220(I_3+I_9)+495(I_4+I_8)-792(I_5+I_7)$$
$$+924I_6]$$

$(1s)^2$

$$F^0 = \tfrac{41}{64}I_0-\tfrac{79}{48}I_1+\tfrac{385}{96}I_2-\tfrac{175}{48}I_3+\tfrac{105}{64}I_4$$

$(1p)^2$

$$F^0 = \frac{1}{1280}\,[363I_0-494I_1+2629I_2-5796I_3+9429I_4-7854I_5+3003I_6]$$

$$F^2 = \frac{1}{256}\,[363I_0-1986I_1+7125I_2-14364I_3+16485I_4-10626I_5+3003I_6]$$

$(1d)^2$

$$F^0 = \frac{1}{107520}\,[19737I_0-23024I_1+126556I_2-203984I_3+418806I_4-790416I_5+1158300I_6$$
$$-926640I_7+328185I_8]$$

$$F^2 = \frac{1}{21504}\,[19737I_0-62492I_1+170452I_2-356324I_3+765702I_4-1452132I_5+1745172I_6$$
$$-1158300I_7+328185I_8]$$

$$F^4 = \frac{1}{35840}\,[59211I_0-463752I_1+2228148I_2-6617592I_3+12376098I_4-14975928I_5+$$
$$+11505780I_6-5096520I_7+984555I_8]$$

$(1f)^2$

$$F^0 = \frac{1}{1290240}\,[175461I_0-189310I_1+1076897I_2-1623688I_3+3127562I_4-4533364I_5+$$
$$+7512362I_6-13104520I_7+18317585I_8+14318590I_9+4849845I_{10}]$$

$$F^2 = \frac{1}{258048}\,[175461I_0-413578I_1+121456I_2-2579800I_3+4363850I_4-6753340I_5+$$
$$+11603306I_6-20689240I_7+25318865I_8-17089930I_9+4849845I_{10}]$$

$$F^4 = \frac{1}{143360}\,[175461I_0-936870I_1+3100977I_2-6467208I_3+10190202I_4-19300644I_5+$$
$$+38686362I_6-55203720I_7+48461985I_8-23556390I_9+4849845I_{10}]$$

$$F^6 = \frac{13}{1290240}\,[175461I_0-1759186I_1+10492625I_2-40457560I_3+103656410I_4-182475436I_5+$$
$$+223872506I_6-188719960I_7+104083265I_8-33717970I_9+4849845I_{10}]$$

0s0p

$$F^0 = \frac{1}{2}\ (I_0+I_1)$$
$$G^1 = \frac{3}{2}\ (I_0-I_1)$$

0p0d

$$F^0 = \frac{1}{24}\ [7(I_0+I_2)+5(I_1+I_3)]$$
$$F^2 = \frac{35}{24}\ [(I_0+I_2)-(I_1+I_3)]$$
$$G^1 = \frac{1}{8}\ [7(I_0-I_2)-(I_1+I_3)]$$
$$G^3 = \frac{49}{24}\ [(I_0-I_2)-3(I_1-I_3)]$$

0d0f

$$F^0 = \frac{1}{160}\ [33(I_0+I_5)+21(I_1+I_4)+26(I_2+I_3)]$$
$$F^2 = \frac{3}{32}\ [11(I_0+I_5)-5(I_1+I_4)-6(I_2+I_3)]$$
$$F^4 = \frac{297}{160}\ [(I_0+I_5)-3(I_1+I_4)+2(I_2+I_3)]$$
$$G^1 = \frac{1}{160}\ [99(I_0-I_5)+9(I_1-I_4)+38(I_2-I_3)]$$
$$G^3 = \frac{21}{160}\ [11(I_0-I_5)-19(I_1-I_4)+2(I_2-I_3)]$$
$$G^5 = \frac{363}{160}\ [(I_0-I_5)-5(I_1-I_4)+10(I_2-I_3)]$$

0f0g

$$F^0 = \frac{1}{13440}\ [2145(I_0+I_7)+1287(I_1+I_6)+1749(I_2+I_5)+1539(I_3+I_4)]$$
$$F^2 = \frac{11}{896}\ [65(I_0+I_7)-13(I_1+I_6)-15(I_2+I_5)-37(I_3+I_4)]$$
$$F^4 = \frac{429}{4480}\ [15(I_0+I_7)-31(I_1+I_6)+3(I_2+I_5)+13(I_3+I_4)]$$
$$F^6 = \frac{1859}{896}\ [(I_0+I_7)-5(I_1+I_6)+9(I_2+I_5)-5(I_3+I_4)]$$

0g0h

$$F^0 = \frac{1}{32256}\ [4199(I_0+I_9)+2431(I_1+I_8)+3484(I_2+I_7)+2860(I_3+I_6)+3154(I_4+I_5)]$$
$$F^2 = \frac{13}{32256}\ [1615(I_0+I_9)-85(I_1+I_8)-40(I_2+I_7)-736(I_3+I_6)-754(I_4+I_5)]$$
$$F^4 = \frac{13}{3584}\ [323(I_0+I_9)-493(I_1+I_8)-92(I_2+I_7)+4(I_3+I_6)+258(I_4+I_5)]$$
$$F^6 = \frac{2873}{32256}\ [19(I_0+I_9)-73(I_1+I_8)+80(I_2+I_7)+8(I_3+I_6)-34(I_4+I_5)]$$
$$F^8 = \frac{71383}{32256}\ [(I_0+I_9)-7(I_1+I_8)+20(I_2+I_7)-28(I_3+I_6)+14(I_4+I_5)]$$

0s0d

$$F^0 = \frac{1}{4}\ [(I_0+I_2)+2I_1]$$
$$G^2 = \frac{5}{4}\ [(I_0+I_2)-2I_1]$$

0p0f

$$F^0 = \frac{1}{16}\ [3(I_0+I_4)+4(I_1+I_3)+2I_2]$$
$$F^2 = \frac{15}{16}\ [(I_0+I_4)-2I_2]$$
$$G^2 = \frac{5}{48}\ [9(I_0+I_4)-8(I_1+I_3)-2I_2]$$
$$G^4 = \frac{27}{16}\ [(I_0+I_4)-4(I_1+I_3)+6I_2]$$

0d0g

$$F^0 = \frac{1}{960}\ [143(I_0+I_6)+154(I_1+I_5)+97(I_2+I_4)+172I_3]$$
$$F^2 = \frac{11}{192}\ [13(I_0+I_6)+2(I_1+I_5)-13(I_2+I_4)-4I_3]$$
$$F^4 = \frac{429}{320}\ [(I_0+I_6)-2(I_1+I_5)-(I_2+I_4)+4I_3]$$

0f0h

$$F^0 = \frac{1}{1792}\ [221(I_0+I_8)+208(I_1+I_7)+156(I_2+I_6)+240(I_3+I_5)+142I_4)]$$
$$F^2 = \frac{13}{1792}\ [85(I_0+I_8)+20(I_1+I_7)-44(I_2+I_6)-20(I_3+I_5)-82I_4]$$
$$F^4 = \frac{117}{1792}\ [17(I_0+I_8)-24(I_1+I_7)-20(I_2+I_6)+24(I_3+I_5)+6I_4]$$
$$F^6 = \frac{2873}{1792}\ [(I_0+I_8)-4(I_1+I_7)+4(I_2+I_6)+4(I_3+I_5)-10I_4]$$

0s0f

$$F^0 = \frac{1}{8}\ [(I_0+I_3)+3(I_1+I_2)]$$
$$G^3 = \frac{7}{8}\ [(I_0-I_3)-3(I_1-I_2)]$$

1s0s

$$F^0 = \frac{1}{8}\ [5(I_0+I_2)-2I_1]$$
$$G^0 = \frac{5}{8}\ [(I_0+I_2)-2I_1]$$

1s0p

$$F^0 = \frac{1}{48}\ [11I_0+37I_1-35I_2+35I_3]$$
$$G^1 = \frac{1}{16}\ [11I_0-41I_1+65I_2-35I_3]$$

1s0d

$$F^0 = \frac{1}{96}\ [15I_0+40I_1+34I_2-56I_3+63I_4]$$
$$G^2 = \frac{5}{96}\ [15I_0-44I_1+106I_2-140I_3+63I_4]$$

1s0f

$$F^0 = \frac{1}{64}\ [9I_0+9I_1+38I_2-10I_3-15I_4+33I_5]$$
$$G^3 = \frac{1}{64}\ [63I_0-147I_1+294I_2-630I_3+651I_4-231I_5]$$

References

1) I. Talmi, Helv. Phys. Acta **25** (1952) 185
2) B. C. Carlson and I. Talmi, Phys. Rev. **96** (1954) 436
3) E. H. Kronheimer, Phys. Rev. **90** (1953) 1003
4) G. E. Tauber and T. Y. Wu, Phys. Rev. **94** (1954) 1307
5) G. Racah, private communication.
6) Private communications from I. Talmi and D. Shalitin
7) L. W. Longdon, Phys. Rev. **90** (1953) 1125
8) British Association Mathematical Tables, Vol. I (1931)
9) H. Jeffreys and B. S. Jeffreys, Methods of Mathematical Physics (Cambridge University Press, 1950) p. 623
10) T. M. MacRobert, Spherical harmonics (Dover Publications, 1948) p. 104
11) G. Racah, Phys. Rev. **61** (1942) 186, eq. (52)

Nuclear Physics **2** (1956/57) 548—574; *North-Holland Publishing Co., Amsterdam*

OF DECAY Eu^{152} AND Eu^{152m}

O. NATHAN and M. A. WAGGONER †

Institute for Theoretical Physics, University of Copenhagen, Denmark

Received 31 August 1956

Abstract: Using magnetic and scintillation spectrometers and coincidence techniques the radiations from pile-irradiated natural Europium have been studied. The energies of a number of beta- and gamma-rays and internal conversion lines were measured and isotopic assignments were made from the coincidence data. The internal conversion coefficients of a number of the transitions are determined from measurements of the relative intensities of gamma-rays and internal conversion lines. Decay schemes are proposed for the two isomers of Eu^{152} and plausible spin and parity assignments for some of the excited states of Sm^{152} and Gd^{152} are presented. The difference in level structure between these two nuclei is discussed in the light of the Bohr-Mottelson unified model and it is suggested that some of the high-lying excited states may possibly be interpreted as collective vibrations of the electric quadrupole and electric octupole type.

1. Introduction

The large increase in nuclear deformation between nuclei with neutron numbers 88 and 90, recently stressed by Mottelson and Nilsson [1]), lends special interest to the study of radioactive Eu^{152} which decays both to Sm^{152} ($N = 90$) and to Gd^{152} ($N = 88$). When this work was started, there was considerable uncertainty about the decay characteristics of 13 year Eu^{152} mainly because of the difficulties in getting good sources free of 10 year Eu^{154}. References to earlier work are given in the paper by Slattery, Lu and Wiedenbeck [2]). When natural Europium is bombarded with neutrons a 9.2 hour activity is also induced. This is known [3, 4, 5]) to belong to an isomeric state of Eu^{152}, but no satisfactory decay scheme was put forward up to 1956. In the course of the present work two investigations on enriched Eu^{152} and fission-product Eu^{154} are reported [6, 7]) in which level schemes are proposed for the decay products Sm^{152}, Gd^{152} and Gd^{154}. Our results are in substantial agreement with these authors but further conclusions as regards the level scheme of Sm^{152} have been drawn

† On leave of absence from Vassar College, Poughkeepsie, New York.

mainly on the basis of measured intensities of internal conversion lines.

2. Experimental Methods and Results

The investigation of the gamma spectra was performed by means of a conventional gamma-gamma coincidence spectrometer employing two $1\frac{1}{2}'' \times 1\frac{1}{2}''$ NaI(Tl) crystals, DuMont 6292 photomultipliers and a 36 channel kicksorter of the Hutchinson and Scarrot design [8]). The resolving time was 2 microsecond and the resolution 7.5 % at 661 keV. The beta-spectra and internal conversion lines were studied with a six-gap beta-ray spectrometer described elsewhere [9]) and with a lens spectrometer of the Slätis-Siegbahn type [10]). The former spectrometer was also used for the investigation of internal conversion-beta, internal conversion-gamma and beta-gamma coincidences with a resolving time of 0.1 microsecond. In the two latter cases the coincident spectra from a $1\frac{1}{2}'' \times 1\frac{1}{2}''$ NaI(Tl) crystal placed immediately behind the source could be displayed on the kicksorter screen. Sources were prepared from spectroscopically pure, natural Eu_2O_3 purchased from Johnson, Matthey and Co., Ltd., London. The sources for the study of the 13 year activity were produced by bombarding this natural Europium for 1 month in the Harwell pile and subsequently vacuum evaporating it on 150 $\mu g/cm^2$ Al foils. The sources for the 9.2 hour activity were prepared by vacuum evaporation of stable Eu_2O_3 on the Al foils and subsequent irradiation of the foils for 12 hours in the Kjeller reactor (Norway) followed by a fast transfer to the spectrometer.

2a. THE 13 YEAR ACTIVITY

The internal conversion spectrum consists of a few low-lying lines of high intensity and a number of relatively weak lines of energies up to 1400 keV. A comprehensive study of the energies of these lines by means of a 180° spectrometer with photographic detection have been published by Cork *et al.* [11]), and apart from a few of the weaker lines our results are in fair agreement with these workers. In table IA are listed the energies and relative intensities observed in the present work using a resolution of about 1 % and the electron energies quoted in ref. [11]). The uncertainties given are those due both to statistics and tailing. The former was particularly serious for the high energy lines which are all situated on a large con-

TABLE I

Energies and relative intensities of internal conversion lines [a].

Electron energy (keV)	Assignment	Isotope	Relative intensity	Data of Cork *et al.* Electron energy [b] (keV)
		A. *The 13 year activity*		
73.1	K– 123	Gd^{154}	520[c]	72.9
75.3	K– 122	Sm^{152}	2400[c]	75.0
115	L– 122	Sm^{152}	1440[d]	114.6
116	L– 123	Gd^{154}	320[d]	115.2–115.8
120	M, N– 122	Sm^{152}	240[d]	120.3
121	M, N– 123	Gd^{154}	75[d]	121.4
198	K– 244	Sm^{152}	81[e]	197.6
237	L, M– 244	Sm^{152}	24	236.4
294	K– 344	Gd^{152}	100	293.5
336	L, M– 344	Gd^{152}	24	335.5
360	K– 410	Gd^{152}	4.0	361.9
395	K– 442[f]	Sm^{152f}	2.7	398.2
431	K– 478[f]	Sm^{152f}	0.9	439.9
531	K– 578[f]	Sm^{152f}	1.4	536.7
564	K– 611[f]	Sm^{152f}	0.9	561.5
609	K– 656[f]	Sm^{152f}	1.2	608.5
641	K– 688[f]	Sm^{152f}	5.1	640.3
705	K– 752	Sm^{152}	1.0	—
725	K– 775	Gd^{152}	2.4	728.5
815	K– 862	Sm^{152}	2.3	820.6
916	K– 963	Sm^{152}	3.2	917
955	K–1002	Sm^{152}	1.6	954
1032	K–1079	Sm^{152}	1.1	1039
1056	K–1103	Sm^{152}	2.2	1066
1369	K–1416	Sm^{152}	1.4	—
		B. *The 9.2 hour activity*		
75	K–122[g]	Sm^{152}	750	
294	K–344[g]	Gd^{152}	100	
790	K–837	Sm^{152}	21	
914	K–961	Sm^{152}	15	

a. The energies are generally believed to be correct to within ± 1.0 % and the intensities to within ± 10 %.

b. Additional lines reported by Cork *et al.*: 242.4, 286.0, 328.5, 341.5, 471.7, 673.6 keV.

c. The total relative intensity of the two K-lines is 2920. Analysis of fig. 1 gives K–122/K–123 $= 4.5 \pm 0.5$.

d. Analysis of conversion electron-beta coincidences gives K/L = 1.66 and L/M = 4.2 for both transitions.

e. The figures for this transition include a small amount (< 15 % as estimated from beta-gamma coincidence measurements) of the 247 keV transition in Gd^{154}.

f. Assignment uncertain.

g. Only the K-lines were investigated in this work.

tinuous beta background. The K-conversion lines of the 122 and 123 keV transitions occurring in Sm^{152} and Gd^{154}, respectively[12, 13]) were partially resolved when a thin source was used (fig. 1), and the separate K/L and L/M+N ratios of these transitions could be determined by taking coincidences between the conversion lines and the beta-particles. The conversion lines from the 244- and 247 keV

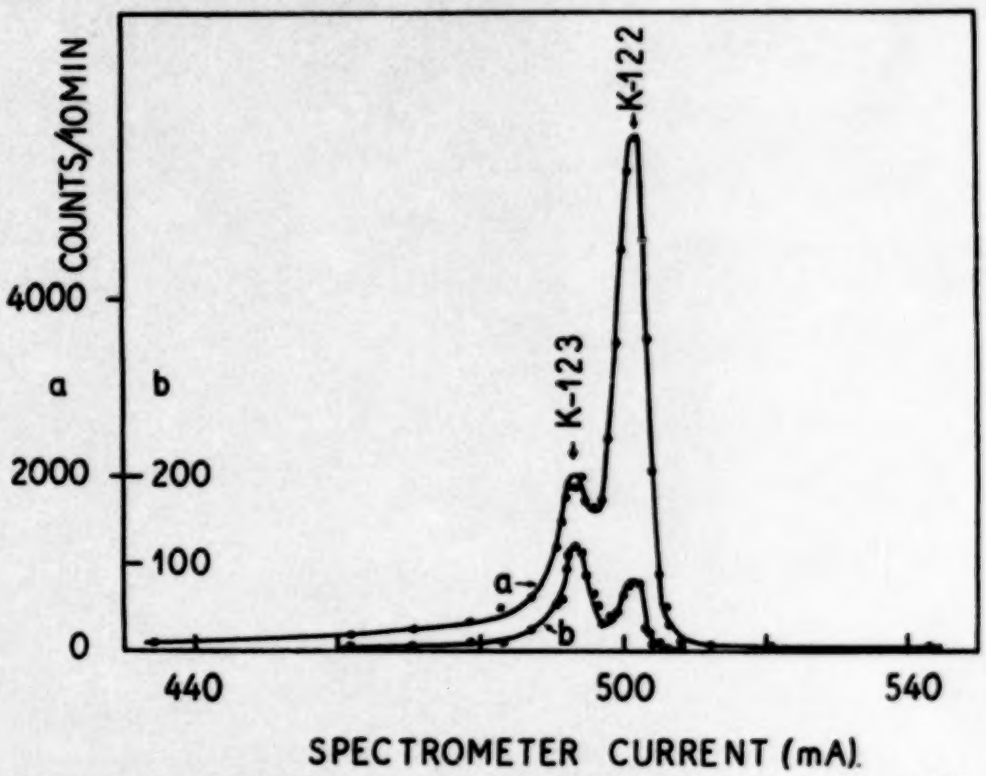

Fig. 1. a. The K-conversion lines of the 122 and 123 keV transitions obtained with two gaps of the six-gap spectrometer and 0.9 % resolution.
b. The same spectrum obtained by taking coincidences with a 30 × 3 mm anthracene crystal situated immediately behind the source. The K-123 peak is relatively increased since it corresponds to a beta-coincident transition. The K-122 coincident counts are due to gamma-rays in cascade with the 122 keV transition.

radiations[12, 13]) could not be resolved by any means available, but conversion electron-beta and beta-gamma coincidences both indicate an upper limit of about 15 % for the 247 keV contribution to the composite lines. The interpretations of the observed lines given in columns two and three of table IA are based on previous work on separated isotopes[6, 12, 13]) and on our coincidence data mentioned below.

Measurements of energies and relative intensities of the gamma rays were performed with a $1\frac{1}{2}'' \times 1\frac{1}{2}''$ NaI(Tl) crystal empirically

TABLE II

Energies and relative intensities of gamma-rays [a].

Gamma-ray energy (keV)	Isotope	Relative intensity
A. *The 19 year activity*		
41 (K X-rays)	Sm^{152}, Gd^{152}, Gd^{154}	330
122+123	Sm^{152}, Gd^{154}	150
244	Sm^{152}	40[b]
344	Gd^{152}	100
420	Gd^{152}	4[c]
775	Gd^{152}	40
860	Sm^{152}	15
965	Sm^{152}	60[d]
1090	Sm^{152}	50[e]
1200	Sm^{152}	20[f]
1280	Gd^{154}	12
1415	Sm^{152}	90
B. *The 9.2 hour activity*		
41 (K X-rays)	Sm^{152}	940
122	Sm^{152}	270
344	Gd^{152}	100
835	Sm^{152}	390
955	Sm^{152}	400
980	Gd^{152}	40[g]
1320	Gd^{152}	100[h]
1415	Sm^{152}	70[h]

a. The energies are believed to be accurate to within ± 1 % and the intensities to within ± 30 %.

b. Contains a small amount (< 15% as estimated from beta-gamma coincidence measurements) of the 247 keV transition in Gd^{154}.

c. Double line?

d. Double line.

e. Double line. From gamma-gamma coincidences the intensity ratio of the two gamma-rays can be roughly estimated as being 1 : 1.

f. Only observed in coincidence with the 244 keV transition. The energy is known to within ± 30 keV and the intensity to within ± 50 %.

g. Only seen in coincidence with the 344 keV transition. The energy is known to within ± 10 keV and the intensity to within ± 50 %.

h. The gamma-rays are unresolved in the singles spectrum, but the 1320 keV line can be removed by taking coincidences with the K X-rays or the 122 keV gamma-ray. The intensities are believed to be accurate to within ± 30 % and the energies to within ± 20 keV.

calibrated with a number of known activities. The results are summarized in table IIA. Due to the complexity of the spectrum and the relatively low resolution of the gamma-ray spectrometer several of the lines resolved in the internal conversion spectrum are poorly

resolved in the gamma spectrum. For this reason the gamma intensities given are believed to be no better than ± 30 % in most of the cases. Except for the 860 and 1280 keV quanta all of the gamma rays listed have been reported in earlier works on unseparated Eu [2]). According to Stephens [6]) the 1280 keV gamma-ray belongs to Gd^{154}, in accordance with the fact that we have observed it in coincidence with the K-conversion line of the 123 keV transition. Using this 1280 keV line to normalize our gamma spectrum and that of Stephens, it appears that the contribution of Eu^{154} to the observed gamma lines of the isotopic mixture in the region 240—1100 keV is probably less than 15 %.

A number of gamma-gamma coincidences were studied in order to establish the existence of the various gamma-gamma cascades. The photopeaks of the prominent gamma-rays were selected by means of a single-channel analyser and the coincident gamma spectrum was displayed on the screen of the kicksorter. In all cases care had to be taken to eliminate false coincidences from the Compton background and spurious peaks from backscatter radiation. The results obtained are summarized in table IIIA.

Of special interest is the behaviour of the 965, 1090 and 1415 keV gamma rays. When these are taken in coincidence with the K X-rays they occur with almost the same relative intensities as in the singles spectrum. When coincidences are taken with the 122 keV radiation the intensity of the 1090 keV peak is considerably lowered relative to the other two. At the same time it is shifted a small, but definite amount toward higher energy (fig. 2). From Coulomb excitation work [14]) the 122 keV transition is known to take place between the first excited level of Sm^{152} and the ground state so that recalling the energies of table IA the data strongly suggest the conclusion that the 1415, 1103, 963 and 1002 keV transitions go to the 122 keV first excited state, while a 1079 keV gamma transition goes to the ground state. This conclusion is further strengthened by the result of the converse of the above experiment: with one crystal set on the 1415 keV line, the ratio of K X-rays and 122 keV quanta is much smaller than with the crystal set on the composite 1090 keV gamma line (fig. 3).

The four strong K-conversion peaks at low energy all lend themselves easily to gamma coincidence studies by the method described above. The six-gap spectrometer is particularly suitable for this type of experiment since the coincidence crystal can be placed im-

TABLE III

Results of gamma-gamma coincidence measurements

Selected event (keV)	Events observed in coincidence with selected events (keV)	Remarks
A. *The 13 year activity*		
41 (K X-rays)	122, 244, ≈ 850, 965, 1090, 1415	The 965, 1090, 1415 keV gamma-rays have approximately the same relative intensities as in the singles spectrum.
122+123	K X-rays, 244, ≈ 450, ≈ 700, 860, 965, 1090, 1415	With the singles spectrum relative intensities as standard the 1090 keV gamma-ray is reduced about 50 % in intensity compared to the 965 and 1415 keV gamma-rays. (fig. 2)
244	K X-rays, 122, ≈ 750, 860, 1200±30	The gamma-ray intensity ratio $I_{1200}/I_{860} \approx 1.3$. The 750 keV gamma-ray is poorly resolved.
344	≈ 420, 780, ≈ 1100, ≈ 1300	The 1100- and 1300 keV gamma-rays are very weak.
750	K X-rays, 122, 244, 344	The coincidences with 344 keV are probably due to the neighbouring 775 keV line.
775	344	
860	K X-rays, 122, 244	
1090	K X-rays, 122	The intensity ratio $I_X/I_{\gamma 122}$ is is about two times higher than in the singles spectrum (fig. 3).
1200	K X-rays, 122, 244	
1415	K X-rays, 122	The intensity ratio $I_X/I_{\gamma 122}$ is about the same as in the singles spectrum.
B. *The 9.2 hour activity*		
41 (K X-rays)	122, 835, 955, 1415	The ratio $I_{\gamma 835}/I_{\gamma 955}$ is about the same as in the singles spectrum. The ratio $I_{\gamma 1415}/I_{\gamma 1415+\gamma 1320} = 0.4$.
122	K X-rays, 835, 1415	
344	980	
835	K X-rays, 122	
955	K X-rays, 344	The 344 keV gamma-ray is due to the neighbouring 980 keV line. From the number of coincident 344 keV quanta one can estimate $I_{\gamma 980}/I_{\gamma 960} \approx 0.1$.
1320	No coincidences	
1415	K X-rays, 122	

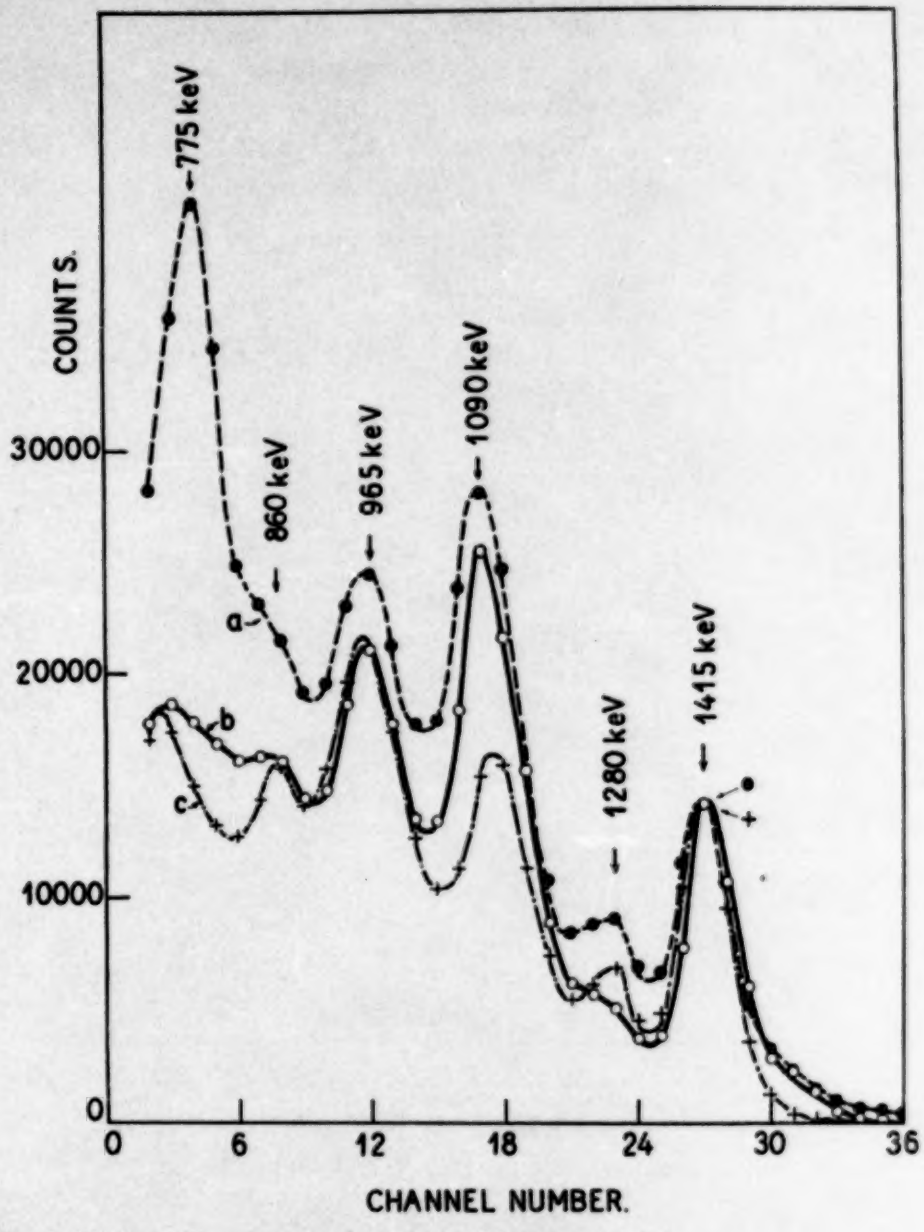

Fig. 2. High energy gamma-rays of the 13 year activity.
a. The normal (singles) spectrum. Source directly on crystal.
b. The spectrum in coincidence with the K X-rays.
c. The spectrum in coincidence with 122+123 keV gamma-rays. For convenience the three spectra are normalized at the 1415 keV peak. The prominent 775 keV photopeak in the singles spectrum is due to a transition in Gd^{152} and the peak at 1280 keV is due to a transition in Gd^{154}, while the peaks at 860, 965, 1090 and 1415 keV are believed to correspond mainly to transitions in Sm^{152}. From the internal conversion data it is known that the peaks at 965 and 1090 keV are double and correspond to transitions at 963, 1002, 1079 and 1103 keV. It is concluded from curves b and c that the 860, 963, 1002, 1103 and 1415 keV radiations are coincident with the 122 keV transition, while the 1079 keV radiation corresponds to a transition to the ground state of Sm^{152}.

mediately behind the source thus requiring no light guide and preserving the resolution of crystal and photomultiplier. To correct for the effect of the continuous spectrum under the line an additional coincidence spectrum was measured with the beta-spectrometer set on the continuum in the immediate vicinity of the line

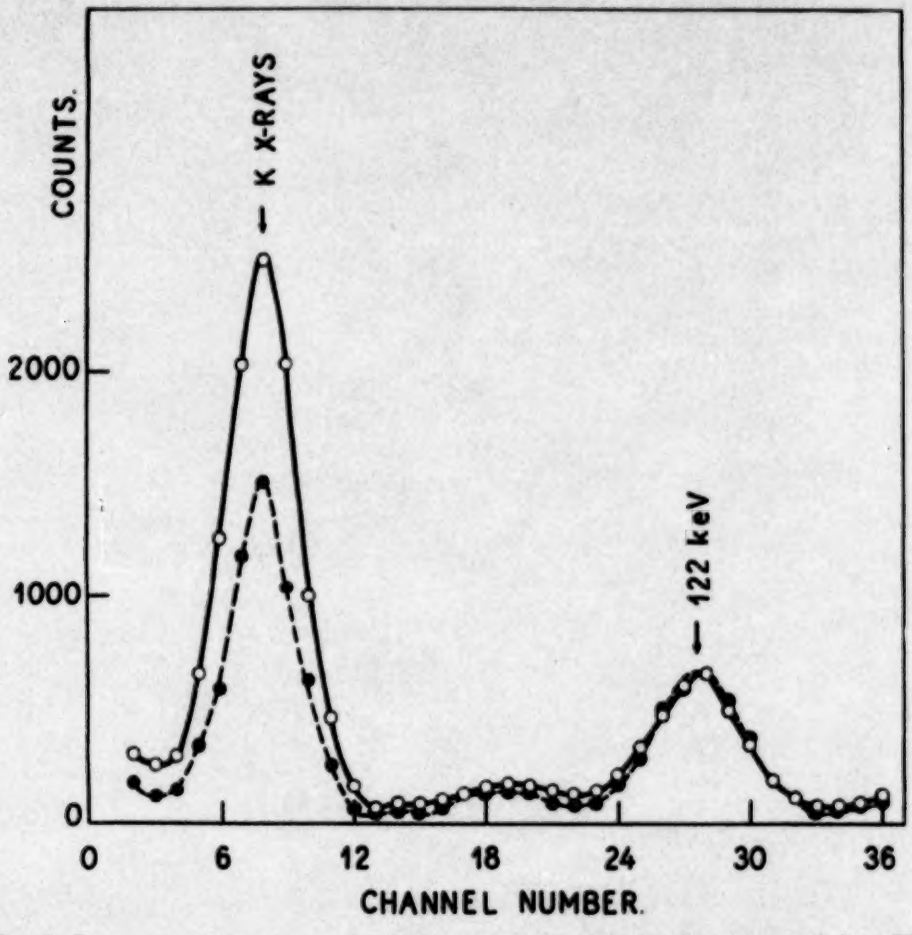

Fig. 3. Low energy gamma- and X-ray spectrum of the 13 year activity. The full drawn curve shows the spectrum coincident with the composite peak at 1090 keV and the dotted curve represents the spectrum coincident with the single peak at 1415 keV. For convenience the two curves are normalized at the 122 keV photopeak. Since the 1090 keV peak represents two transitions in Sm^{152} of which only one is coincident with the 122 keV transition, the number of K X-rays per 122 keV photon is larger in this case, than in the case of coincidences with the 1415 keV radiation.

in question. While the information obtained by this method applied to the K-conversion lines of the 244 keV and 344 keV transitions simply confirmed the results of table IIIA, additional information was obtained by observing the gamma-rays in coincidence with the K-conversion lines of the 122 and 123 keV transitions, which could

not be resolved by the gamma-spectrometer. Since these lines could be partially resolved in the beta-spectrometer, it was possible to carry out coincidence studies with each of the lines separately. As is evident from fig. 1, however, much care had to be taken in the case of the 123 keV K-conversion line to correct for the tailing of the stronger neighbouring line. The results are summarized in table IVA and show satisfactory agreement with Stephens' gamma coincidence work on Eu^{154} (fig. 7).

TABLE IV

Results of internal conversion electron-gamma coincidence measurements

Selected event in beta-spectrometer (keV)	Events observed in coincidence with the selected events (keV)
A. *The 13 year activity*	
K–122	244, ≈ 450, ≈ 600, ≈ 700, ≈ 1000, ≈ 1100, ≈ 1420
K–123	≈ 710, ≈ 880, ≈ 980, ≈ 1280
K–244	122, ≈ 750, ≈ 860, ≈ 1200
K–344	≈ 420, 775
B. *The 9.2 hour activity*	
K–122	835, 1415

The complex character of the continuous beta-spectrum was revealed through a study of the gamma-rays in coincidence with various regions of the continuous beta-spectrum. The experimental arrangement was the same as for the conversion electron-gamma coincidences. Since all beta-rays up to the highest energies were found to be gamma-coincident it can be concluded that all beta-transitions take place to excited states of Gd^{152} and Gd^{154}. In particular, the highest energy components were found to be in coincidence with the 123 and 344 keV quanta only, thus indicating transitions to the first excited states in each of the two nuclei. The complete coincident gamma-spectrum was displayed on the kicksorter screen for a large number of spectrometer settings so that an estimate of the end-points of the various beta-components could be made. These results are tabulated in table VA. In the case of the beta-rays in coincidence with the 344 keV gamma a Fermi-plot could be constructed from the coincidence data (fig. 4)

since the gamma ray appeared on a negligible Compton background. The resulting end-point of 1515±30 keV for this beta spectrum is to be compared with Kendall and Grodzins' somewhat lower value [7]) of 1460 keV. The 1850±20 keV value for the energy of the beta transition to the 123 keV state was determined from singles measurements on the beta spectrum in the region above 1550 keV where no

TABLE V

Results of continuous beta-gamma coincidence measurements

Selected coincident gamma-ray (keV)	Maximum beta energy at which coincidences with the selected gamma-ray is observed (keV)	Remarks
A. *The 13 year activity*		
123	1850±20	End-point determined from the region 1550–1900 keV without taking coincidences.
244	350±100	Only a very weak 244 keV gamma-ray is observed on a high Compton-background from the 344 keV transition.
344	1515±30	The Fermi-plot constructed from the coincidence data is straight from 1515 keV to about 750 keV (fig. 4).
≈ 420	950±50	Very weak.
≈ 580	750±50	Very weak.
775	720±25	
≈ 1030	950±50	
≈ 1150	750±50	Very weak. Probably a sum line of the 775 keV and 344 keV transitions.
1280	580±50	
B. *The 9.2 hour activity*		
344	1550±50	
≈ 980	560±50	
1320	560±50	

other beta transitions were present. The result is in reasonable agreement with the 1880 keV value quoted by Stephens (fig. 7). Further, beta-rays ending at 580 keV and 950 keV also agree with Stephens' data, both as regards gamma energies and beta end-points. However, the endpoints found by us for the beta components in coincidence with the 244 and 580 keV quanta, 350±100 and

750 ± 50 keV, respectively, conflict with the decay scheme proposed by Stephens. Both gamma rays were, however, very weak in our beta-gamma coincidence spectra with some consequent uncertainty in the results, and a decisive answer will probably only be given through a beta-spectroscopic study of enriched Eu^{154}.

No attempt has been made to determine the relative strength

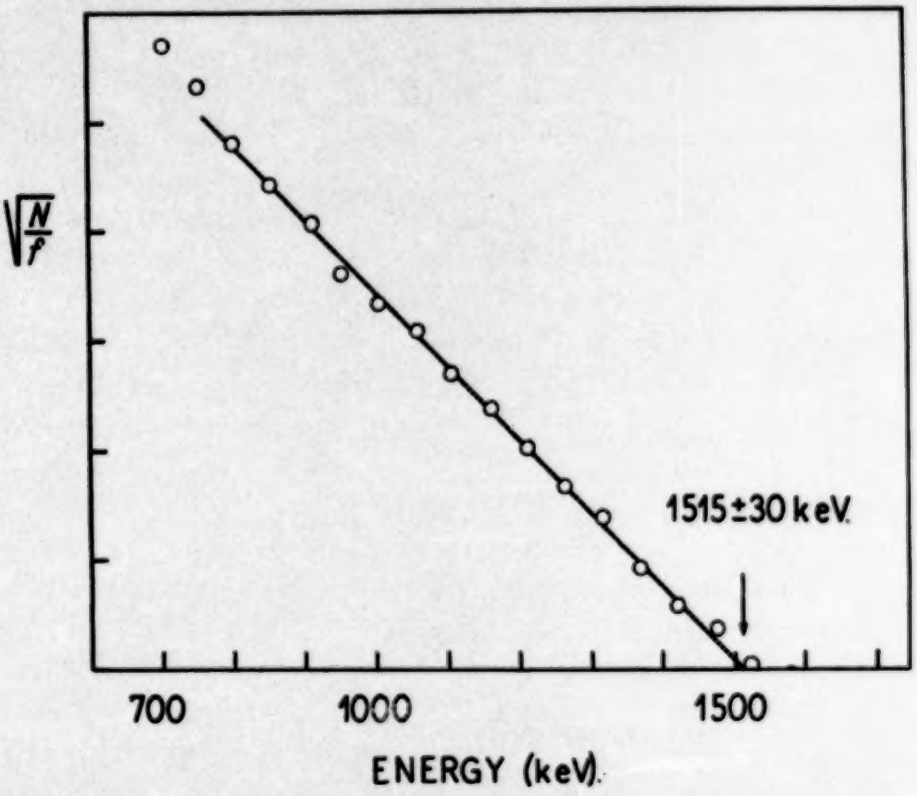

Fig. 4. Fermi-plot of the beta-transition of the 13 year activity that takes place to the 344 keV, 2+ state of Gd^{152}. The data were obtained by measuring for different settings of the beta-spectrometer the intensity of the coincident 344 keV gamma-ray as viewed by a $1\frac{1}{2}'' \times 1\frac{1}{2}''$ NaI(Tl) crystal situated immediately behind the source.

of the various beta components by Fermi-analysis as the complexity of the spectrum and uncertain shapes of its components make this procedure quite unreliable.

2b. THE 9.2 HOUR ACTIVITY

The study of 9.2 hour Eu^{152} was carried out in much the same way as for the long-lived radiation. Due to the shorter half-life a detailed search for internal conversion lines was undertaken mainly in the regions which the gamma measurements indicated as interesting. A search was made for the K-conversion line of a 244 keV transition and also for conversion lines in the region between

925 keV and 1400 keV, but no lines were observed. The low-energy region from 10—100 keV was studied with a thin source, but apart from the three Auger groups and the 122 keV K-conversion line, no lines were found. The intensity of the Auger groups relative to the 122 keV K-line was in good agreement with the relative intensities of the K X-rays and the 122 keV gamma ray quoted in table IIB, when the value 0.90 was assumed for the fluorescence yield [15]) and the theoretical E2 K-conversion coefficient [16]) 0.60 was assumed for the 122 keV transition †.

The observed K-conversion lines are listed in table IB. The 122- and 344 keV K-conversion lines have previously been reported by Hill and Shepherd [4]) and Keller and Cork [5]), whereas the two high-energy lines are hitherto unreported. Although excellent beta-ray sources of this activity can be prepared in the manner described above, the search for weak conversion lines is made difficult by the large ratio of beta- to K-capture transitions. From the coincidence studies discussed below it appears that of the observed internal conversion lines the only one corresponding to a transition in Gd^{152} is the 344 keV transition which is also seen in the 13 year decay. This transition takes place from the first excited state to the ground state, and both from the sytematics of even-even nuclei and from the measured K/L ratio of about 5 (table IA) we would expect it to be E2. If we use a theoretical K-conversion coefficient [16]) of 0.03 and neglect the relatively small conversion in the M and N shells, we can find the absolute intensity of the transition by comparing the area of the K-line with the total area of the beta spectrum. In this way one finds that the 344 keV transition follows 3.5 ± 0.5 % of all beta-decays.

The gamma-ray spectrum of the 9.2 hour activity is shown in fig. 5 and the corresponding energies and intensities are summarized in table IIB. Prominent features of the spectrum are the two strong gamma-rays at 835 and 955 keV evidently corresponding to the K-conversion lines of table IB. Both from coincidence behaviour and from energy considerations neither of these two quanta is identical with any of the gamma-rays of 13 year Eu^{152}.

The gamma-gamma coincidence data are summarized in table IIIB. The results immediately suggest that two high-lying levels

† The finite size corrected K-conversion coefficients for E1, E2 and M1 radiation recently calculated by Sliv and Band [17]) differ in this Z-region only insignificantly from those given by Rose [16]).

are excited by K-capture: a level at 960 keV decaying both to the ground state and the 2+ level, and a level at 1537 keV decaying only to the 2+ state. Since the conversion line corresponding to the de-excitation of the 1537 keV level was not observed, the energy of this level can be given only to within ± 20 keV.

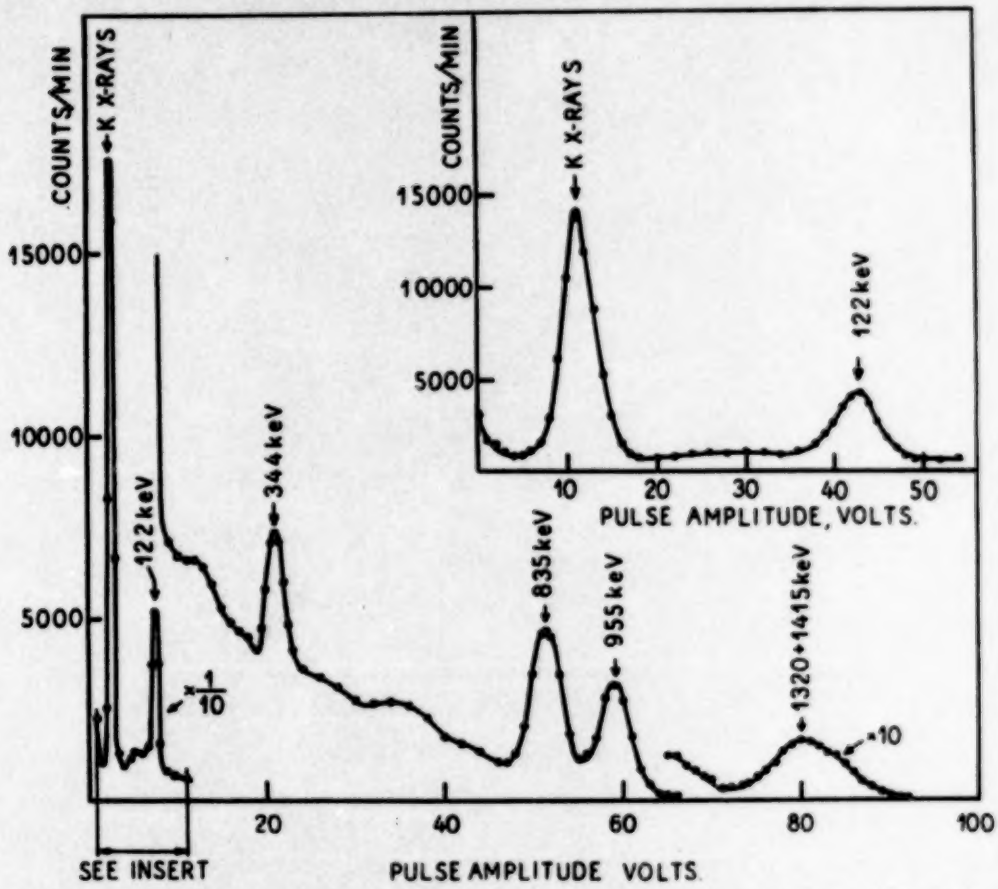

Fig. 5. Gamma-ray spectrum of the 9.2 hour activity measured by a $1\frac{1}{2}'' \times 1\frac{1}{2}''$ NaI(Tl) crystal and a single-channel analyser. Source to crystal distance 15 cm.

Internal conversion-gamma coincidences were carried out only on the K-conversion line of the 122 keV transition as this was the only conversion line in the spectrum with a sufficient peak to valley ratio to make this feasible. The result, quoted in table IVB, gives a check on the gamma-gamma coincidences.

The continuous beta-spectrum of the 9.2 hour activity has previously been studied by Hill and Shepherd [4]) who found a strong ground state transition with a Fermi-plot straight from the end-point at 1880 keV down to about 500 keV. We find the end-point to be 1890 ± 20 keV, but observe deviations from a straight Fermi-plot starting at 1500 keV (fig. 6). This behaviour is to be

expected as beta-gamma coincidences clearly showed that the 344 keV state is populated directly in the beta-decay. No attempt was made to estimate the beta branching ratios by subtraction methods as it was felt to be much safer to rely on gamma- and conversion line intensities for this information. Table VB sum-

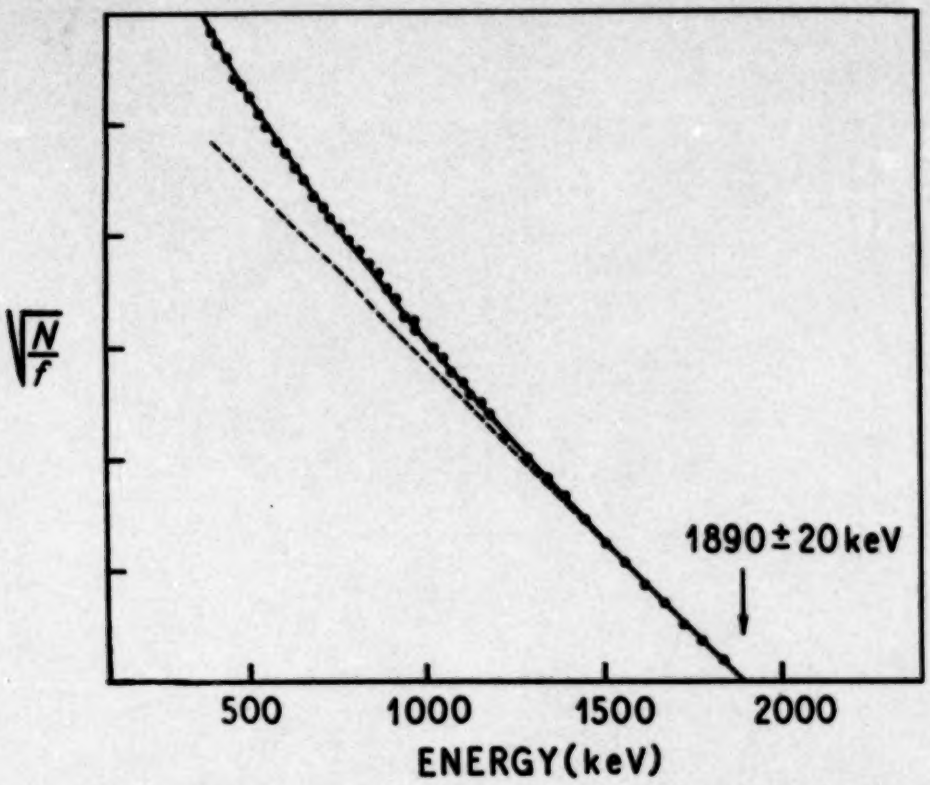

Fig. 6. Fermi-plot of the total beta-spectrum of the 9.2 hour activity.

marizes the results of the beta-gamma coincidences. The data clearly suggest a level in Gd^{152} at about 1320 keV which de-excites to the ground state and to the first excited state.

No search was undertaken in the present work for positons from the 9.2 hour activity. Hill and Shepherd [4]) give an upper limit of 10^{-4} positon per negaton which would make the positons very difficult to observe with our present techniques.

3. Level Schemes

We shall make no attempt to propose a decay scheme for Eu^{154} on the basis of the data collected in this work, since most of the radiations from this nucleus are masked by the many strong conversion lines and gamma-rays from Eu^{152}. However, information we have obtained on radiations that definitely belong to

Eu^{154} in most cases seems to support the tentative decay scheme proposed by Stephens [6]) and we will therefore use this as a guide for further considerations of the decay of Eu^{154}.

Figs. 8a and 8b show the decay schemes for 13 year and 9.2 hour Eu^{152} constructed on the basis of the data presented. These schemes

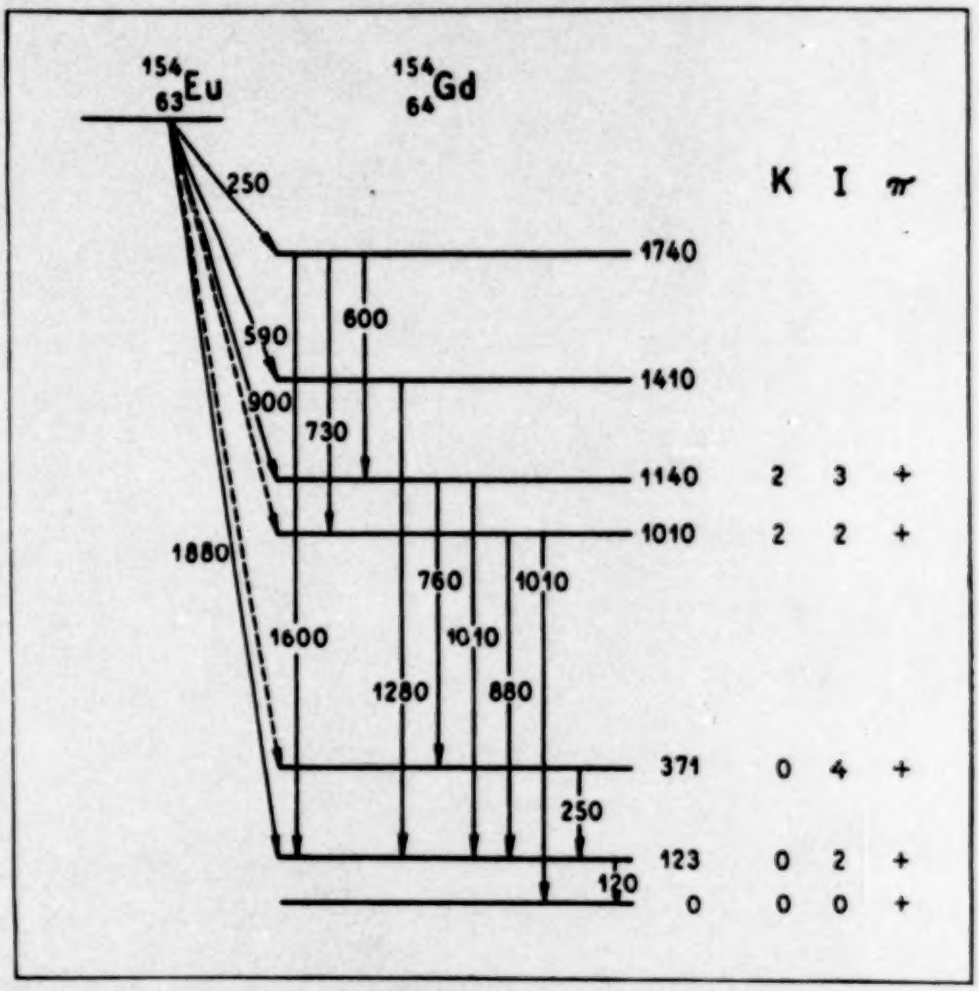

Fig. 7. Decay scheme for 10 year Eu^{154} reproduced from ref. [6]).

account in a consistent way for most of the stronger transitions observed, but it must be emphasized that a number of weak conversion lines in the region 400—700 keV still cannot be fitted into the schemes in a satisfactory way. Future work is planned on enriched sources with the hope of clearing up these points. Stephens' decay scheme [6]) of Eu^{154} is given in fig. 7 for comparison. The level schemes proposed by us are in many respects similar to those put forward by Kendall and Grodzins [7]), but differ widely from the work of Slattery *et al.* [2]).

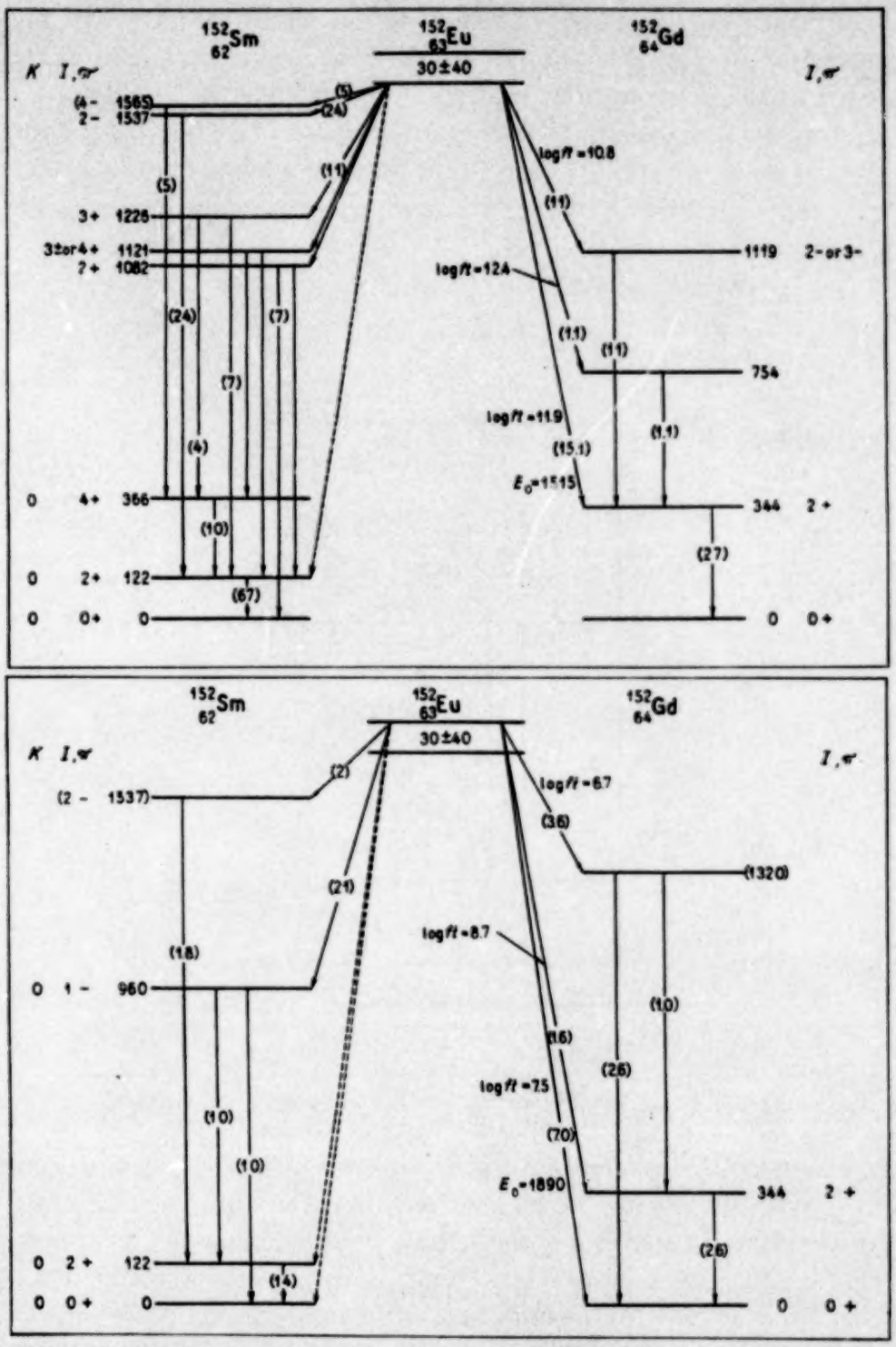

Fig. 8. Proposed decay schemes for (a) 13 year Eu^{152} and (b) 9.2 hour Eu^{152}. For the levels for which the corresponding figures are given in parenthesis no internal conversion data are reported and, therefore, energies and spin and parity assignments are less certain. Total transition intensities, where known, are given in brackets as percentage of total disintegrations.

Sm^{152}. From Coulomb excitation work [14]) and from half-life determination [18]) it is known that the 122 keV transition takes place between the first excited state and the ground state of Sm^{152} and that the radiation is E2. The coincidence data of tables IIIA and IVA indicate that the second excited state is situated at 366 keV and energy considerations furthermore suggest that these two states are the second and third members of a rotational band built on the ground state and thus have the spins and parities 2+ and 4+. This interpretation is supported by the absence of a 366 keV cross-over and the E2 character of the 244 keV transition indicated by the observed conversion coefficient (table VII) and the K/L ratio (table IA). For a 244 keV transition the theoretical calculations of Rose *et al.* [19]) predict $K/L \simeq 7$ for M1 and $\simeq 4$ for E2, while the observed value is $K/L \simeq 4$.

The levels at 960, 1082, 1121 and 1226 keV are proposed, as mentioned above, on the double argument of gamma-gamma coincidence data and energy fit of internal conversion lines. Moreover, two gamma-rays at about 750 keV and 860 keV have been found in coincidence with the 244 keV transition and these can probably be identified with the 752 keV and 862 keV transitions found in the internal conversion spectrum (table IA). It then follows that these two transitions go from the 1121 and 1226 keV states, respectively, to the 366 keV, 4+ state.

The de-excitation of the 1537 keV level presents a particular problem. From the data on the 13 year activity it is not completely certain whether this state decays solely by the 1415 keV transition to the 2+ state or whether a competing transition to the 366 keV, 4+ state also takes place. Energy considerations do not completely rule out the latter possibility, since the energy of the 1200 keV gamma-ray seen in coincidence with the 244 keV transition (tables IIIA, IVA) could be established only to within ± 30 keV. In the 9.2 hour decay, however, a transition is observed which can possibly be identified with the 1415 keV transition of the long-lived activity while no trace of the 244 keV transition could be found, although the internal conversion spectrum was carefully scanned in this region. And yet the observed relative gamma-ray intensities of the 1415 and 1200 keV photons in the 13 year decay indicate that if both transitions are competing de-excitations of the same level, the intensity of the 244 keV K-conversion line in the 9.2 hour decay should be about 40 % of the 344 keV K-

conversion line and should certainly have been detected. Both energy and intensity considerations thus suggest the existence of another level in the neighbourhood of the 1537 keV level with an energy of about 1565 keV and decaying mainly to the 366 keV, 4+ state.

As only the 122 keV and 244 keV gamma-rays have been found in coincidence with the high-energy gamma-rays of Sm^{152}, one is led to the conclusion that the levels from 960 keV and upwards are fed for the main part by direct K-capture, although one certainly cannot exclude that a detailed investigation of enriched Eu^{152} will reveal weaker transitions between some of these states. Two transitions of this character are in fact proposed in the work of Kendall and Grodzins [7]).

Gd^{152}. The position of the first excited state at 344 keV is strongly suggested by the beta-gamma coincidence data of the 9.2 hour activity. A 1550 ± 50 keV beta-component is coincident with the 344 keV transition while no gamma-rays were found in coincidence with the 1890 keV beta-ray. The position of the other levels proposed at 754, 1119 and 1320 keV then follow unambiguously from the gamma-gamma and beta-gamma coincidences.

Eu^{152}. On the basis of the observed beta-ray end-points in the 13 year and 9.2 hour activities the energy difference between the ground state and the isomeric state of Eu^{152} can be estimated. In the long-lived decay we obsserve a 1515 ± 30 keV beta-ray to the 344 keV state of Gd^{152}. The energy difference between the ground states of Eu^{152} and Gd^{152} is therefore 1859 ± 30 keV. The 9.2 hour activity, on the other hand, decays with an 1890 ± 20 keV beta-ray to the ground state of Gd^{152} from which we conclude that the isomeric state is situated 30 ± 40 keV over the ground state. This value is somewhat lower than the value 80 ± 25 keV given by Kendall and Grodzins [7]). As mentioned above a search was made in the 9.2 hour activity for conversion lines in this energy region but with negative result. It cannot be excluded, however, that weak lines are hidden in the Auger region.

4. Branching Ratios and Transition Probabilities

An estimate of the K-capture/beta-decay ratios in the short- and long-lived decays of Eu^{152} can be obtained from the proposed

decay schemes and the intensity data on the gamma-lines in question.

The 13 year decay. The strong beta-transition to the 344 keV state and the absence of a beta-transition to the ground state of Gd^{152} makes it probable that the K-capture branch to the ground state of Sm^{152} is weak or absent. This suggestion is supported by the magnitude of the K X-ray yield relative to the gamma-ray intensities (table IIA). We thus get from fig. 8a that the ratio K-capture/beta-decay $= (I_{122}+I_{1079})/I_{344}$, where I_x stands for the total gamma and internal conversion relative transition intensity of a transition of x-keV energy. The appropriate intensities can be derived from the gamma intensities of table IIA, the theoretical K-conversion coefficients and the observed K/L and L/M+N ratios of table IA. From the tables of Rose [16]) we get $\alpha_2 = 0.6$ at 122 keV and $\alpha_2 = 0.03$ at 344 keV and thus

$$\frac{\text{K-capture}}{\text{beta-decay}} = \frac{0.82\cdot 150\cdot[1+0.6+(0.6/1.7)+(0.6/1.7\cdot 4.2)]+25}{100(1+0.03)} \approx 2.7.$$

The 9.2 hour decay. Although in this case the ground state is fed strongly in the beta decay, a consideration of the K X-ray intensity indicates a weak or missing ground state transition in the K-capture process. By use of fig. 8b and table IIB we get for the number of K X-rays produced in K-capture to excited states

$$w_k(270\cdot 2.03+400) = 855$$

where w_k is the fluorescence yield which, according to the curve given by Bergström [15]), is about 0.90. The number of K-conversion X-rays in corresponding units is

$$w_k\cdot 270\cdot 0.6 = 145$$

if we neglect the small contribution from the more energetic transitions.

The total number is thus 1000, which is in accordance with the observed intensity of 940 within the limits of experimental error. The argument therefore indicates that the ground state transition is very weak. An estimate of the branching ratio can then be made: K-capture/beta-decay $= (I_{122}+I_{961})/I_\beta$, where I_x has the same meaning as above and I_β means the relative intensity of the continuous beta spectrum. The latter magnitude can be expressed in terms of the relative transition intensity of the 344 keV transition

and the previously given result that this transition follows 3.5 % of all beta-rays. We obtain

$$\frac{\text{K-capture}}{\text{beta-decay}} = \frac{I_{122}+I_{961}}{I_{344}\cdot 1/0.035} = \frac{270\cdot 2.03+400}{103}\cdot 0.035 \approx 0.32.$$

Using these branching ratios, the theoretical conversion coefficients and the observed K/L ratios, the relative gamma-ray intensities of table II can be converted to absolute transition intensities. The results are indicated in fig. 8a and fig. 8b.

From a knowledge of the absolute branching ratios the log *ft*-values of the various beta-transitions to Gd^{152} can be calculated.

TABLE VI

Gd^{152}: Beta groups and log *ft* values

Beta group (keV)	Gamma-rays in coincidence with the beta-group (keV)	Level in Gd^{152} (keV)	Percentage of total Eu^{152} activity	log *ft*
A. *The 13 year activity*				
1515	344	344	15.1	11.9
1105	344, 410	754	1.1	12.4
740	344, 775	1119	10.8	10.8
B. *The 9.2 hour activity*				
1890	none	0	70	7.5
1546	344	344	1.6	8.7
570	344, 1320, 980	1320	3.6	6.7

This has been done with the aid of the graphs given by Moszkowski[20]). The results are given in tables VIA and VIB. Since the intensities of the 980 and 1320 keV transitions could be inferred only from gamma-gamma coincidence experiments, the calculated log *ft*-value for the transition to the 1320 keV state in the 9.2 hour decay is accurate only to within ± 0.3. The situation in the K-capture branch is less good since a large part of the transitions take place to highly excited states and the energy difference between the ground states of Eu^{152} and Sm^{152} is known only to within ± 100 keV [7]) leaving a large uncertainty in the energy available for some of the decays. Because of these uncertainties we have not attempted to derive the *ft*-values in this branch from the present data.

5. Multipole Orders and Spin and Parity Assignments

From a knowledge of relative intensities of gamma-rays and K-conversion lines one can estimate the relative magnitude of the K-conversion coefficients. These relative values can be converted to absolute conversion coefficients if the multipolarity of one of the transitions involved is known in an independent way. In our case we have chosen the 344 keV E2 radiation as the reference line and for it we have adopted the theoretical K-conversion coefficient [16])

TABLE VII

K-conversion coefficients and multipolarity assignments

Transition energy (keV)	Relative intensity of K-conversion lines	Relative intensity of gamma lines	Experimental K-conversion coefficients	Theoretical K-conversion coefficients			Proposed multipolarity
				E1	E2	M1	
A. The 13 year activity							
122+123	2920	150	$5.8 \cdot 10^{-1}$		$6.0 \cdot 10^{-1}$	$8.3 \cdot 10^{-1}$	E2
244+247	81	40	$6.1 \cdot 10^{-2}$		$7.8 \cdot 10^{-2}$	$1.3 \cdot 10^{-1}$	E2
344[a]	100	100	$3.0 \cdot 10^{-2}$		$3.0 \cdot 10^{-2}$		E2
775	2.4	40	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$		E1
862	2.3	15	$4.6 \cdot 10^{-3}$		$2.8 \cdot 10^{-3}$	$5.2 \cdot 10^{-3}$	M1
963	3.2	60[b]		$9.2 \cdot 10^{-4}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$	
1002	1.6			$8.5 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$3.6 \cdot 10^{-3}$	
1079	1.1	≈25	$\approx 1.3 \cdot 10^{-3}$	$7.6 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$3.0 \cdot 10^{-3}$	(E2)
1103	2.2	≈25	$\approx 2.6 \cdot 10^{-3}$	$7.2 \cdot 10^{-4}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$	(M1)
1200	<0.3	20	$< 4.5 \cdot 10^{-4}$	$6.1 \cdot 10^{-4}$			(E1)
1285	<0.3	12	$< 7.5 \cdot 10^{-4}$	$6.0 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$		(E1)
1415	1.4	90	$4.7 \cdot 10^{-4}$	$4.5 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$		E1
B. The 9.2 hour activity							
344[a]	100	100	$3.0 \cdot 10^{-2}$		$3.0 \cdot 10^{-2}$		E2
837	21	390	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$3.1 \cdot 10^{-3}$		E1
961	15	400	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$0.9 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$		E1

a. The 344 keV transition is assumed to be pure E2 with a (theoretical) K-conversion coefficient of $3.0 \cdot 10^{-2}$. All other experimental determinations are made relative to this.

b. Unresolved in the gamma-spectrum.

$\alpha_2 = 0.03$. This line is present in both activities and its energy is high enough to exclude serious errors due to tailing in the determination of the K-conversion line intensity. Table VII gives the experimental conversion coefficients that can be calculated in this way together with the theoretical values for E1, E2 and M1 radiation.

Sm^{152}. The agreement within the experimental uncertainties of the observed K-conversion coefficients and the theoretical E2 conversion coefficients for the 122 and 244 keV radiations provides a check on the experimental procedure. Odd parity is suggested by the data of table VII for the 960 keV and 1537 keV states of Sm^{152}. The 960 keV level is uniquely fixed as a 1− level by the two E1 radiations to the 0+ and 2+ members of the ground state rotational band. The two possibilities 2− and 3− are available for the 1537 keV level since 1− is improbable due to the absence of a cross-over to the ground state from this level. Two arguments favour the 2− assignment: no transition has been observed from he 1537 keV level to the 366 keV, 4+ state; and it is possible, as has been discussed above, that the 1537 keV level is excited by K-capture of the 9.2 hour activity, in which the 1− level at 960 keV and the 0+ ground state of Gd^{152} are strongly fed by direct K-capture and beta-decay, respectively.

The upper limit for the conversion coefficient of the 1200 keV transition given in table VII indicates that this radiation is also E1. However, no transitions have been observed from the 1565 keV level to the 122 keV, 2+ state or to the third rotational 6+ state with a predicted energy of about 800 keV. One would therefore be inclined to assign the spin 4− to this state, although this assignment can only be of tentative nature.

For the 1079 and 1103 keV radiations the relative gamma-ray intensities were estimated from the coincidence data. In this way it is found that the 1079 keV transition is mainly E2 and the 1103 keV transition mainly M1. This and the M1 character of the 862 keV transition indicate spin 3, even parity for the level at 1226 keV and spin 2, even parity for the 1082 keV state. Since the two gamma-rays near 1000 keV could not be resolved by any coincidence measurements, no direct determination of their separate intensities, and thus their multipolarity, is possible. The best fit to the measurements is obtained by choosing either E2 for both transitions or E1 for the 1002 keV transition and M1 for the 963 keV transition. The experimental evidence in the case of the 752 keV transition is also far from conclusive due to the masking of this line by neighbouring gamma-rays. Possible spin and parity assignments for the 1121 keV state are thus 3+, 4+, or 3−.

Gd^{152}. Apart from the 344 keV transition which was used as a

reference line, sufficient experimental data are present only for the 775 keV transition. The E1 assignment suggested in table VII gives the possiblities 1−, 2− and 3− for the 1119 keV level, of which the 1− is unlikely since no direct transition to the ground state has been observed. This result is in accordance with the 3− assignment proposed by Kendall and Grodzins [7]) on the basis of angular correlation measurements.

6. Discussion

The level schemes of fig. 7 and fig. 8 clearly illustrate the large change in nuclear structure that is expected between neutron numbers $N = 88$ and $N = 90$. The two nuclei Sm^{152} and Gd^{154} with $N = 90$ exhibit very similar level structures that differ markedly from that of Gd^{152} which is two neutrons closer to the closed shell at $N = 82$. While the low-lying levels in the two $N = 90$ nuclei are of rotational character corresponding to a spheroidal shape, this interpretation seems improbable for Gd^{152}. The present data indicate that the first and second excited states of this nucleus are situated at 344 keV and 754 keV, respectively, giving an energy ratio $E_2/E_1 = 2.2$ in contrast to the two $N = 90$ nuclei with $E_2/E_1 = 3.0$. Furthermore, the 2+ assignment has been proposed [1]) for the 754 keV state on the basis of angular correlation measurements. From these considerations and the general systematics of the first excited states of even nuclei in the region $36 \leqq N \leqq 88$ it seems probable that the two states correspond to collective vibrations of the electric quadrupole type about a spherical equilibrium shape [21, 22]) †. According to this interpretation one would expect a much smaller reduced E2 transition probability from the 754 keV, 2+ state to the ground state than for the competing 410 keV transition to the first excited state. This is in agreement with the fact that we were unable to observe with any certainty a 754 keV cross-over to the ground state. With the assumption of E2 radiations for both transitions a hindrance factor of more than 20 is indicated by the experiments. From the interpretation in terms of quadrupole vibrations it is furthermore suggested that the 754 keV state is part of a degenerate triplet,

† An extensive discussion of collective vibrational states in the light of the unified theory of nuclear structure has been given in a review article on Coulomb excitation by Alder *et al.* [22]). We are indebted to the authors for making this paper available to us before publication.

of characters 0+, 2+, 4+. So far, however, there seems to be no experimental evidence for the existence of a 0+ state or a 4+ state in the vicinity of the 754 keV state.

It has been suggested [22]) that electric quadrupole vibrations may take place also in even nuclei of spheroidal shape giving rise to rotational sequences of states of characters 0+, 2+, 4+, ... (beta-vibrations) and 2+, 3+, 4+, ... (gamma-vibrations). For the beta-vibrational spectrum $K = 0$, while $K = 2$ for the gamma-vibrations; K is the quantum number introduced in the unified model which represents the projection of the total angular momentum along the nuclear symmetry axis. The separation between the two first members of such bands is expected to be nearly the same as the corresponding separation in the ground state rotational band. Empirical evidence for states with some of these properties has been reported in a few heavy even nuclei at an excitation energy of about one MeV (cf. [22]) for references). In the case of the deformed nucleus Sm^{152}, therefore, one might interpret the 1082 keV, 2+ state and the 1226 keV, 3+ state as quadrupole vibrational states. From the data of table VII it appears that the 3+ state decays mainly by M1 radiations, but due to the experimental uncertainties involved it is difficult to estimate the amount of E2 admixture. It is therefore not possible to make a quantitative comparison with the theoretical prediction [22]) that magnetic dipole radiation is forbidden in the decay of vibrational excitations.

The properties of the 960 keV, 1− state of Sm^{152} also deserve special attention. The gamma branching ratios in the E1 decays to the 0+ and 2+ members of the ground state rotational band can be obtained either directly from table IIB or from the conversion line intensities and the theoretical conversion coefficients in table VII. In both cases we get almost 1 : 1 for this ratio of transition probabilities. If we remove the third power energy dependence expected for electric dipole radiation, we get for the ratio between the reduced transition probabilities $\gamma_0/\gamma_2 = 1/1 \cdot 1/1.5 = 0.67$. From the treatment given by Alaga *et al.* [23]) it turns out that the theoretical ratio is $\gamma_0/\gamma_2 = 0.5$ with the quantum number $K = 0$ for the 1− state, while for $K = 1$ the theory predicts $\gamma_0/\gamma_2 = 2.0$. The present data thus imply a $K = 0$ assignment for the 960 keV, 1− state of Sm^{152}.

Recently a number of relatively low-lying 1− states have been

found to occur systematically in even nuclei well above the closed shell of $Z = 82$ and $N = 126$, that is in a region where there also exist low-lying bands of levels of rotational character [24]). In all cases the E1 branching ratios to the ground state rotational bands have suggested a $K = 0$ assignment. An interpretation of these states has been proposed [22]) in terms of collective vibrations of approximately octupole type. The properties of the 1− state of Sm^{152} are such that one might possibly interprete this state in the same way. Theoretically it is expected [22]) that these octupole vibrations give rise to a sequence of states of characters 1−, 3−, 5−, ... In some cases 3− and 5− states have been observed empirically together with the 1− state [25, 26]). In the present case a possible candidate for the 3− level is the state at 1121 keV for which the experiments indicate the possibilities 3+, 4+ or 3−, but no more definite statement in this regard is possible from the present data.

While in a deformed nucleus such as Sm^{152} the level sequence in the rotational band associated with the lowest octupole vibrational excitation is 1−, 3−, ... it is expected [22]) that octupole vibrations in a spherical nucleus such as Gd^{152} give rise to a vibrational spectrum of which the lowest state is of 3− character. This difference is ascribed to the coupling between the quadrupole deformation and the octupole mode in the spheroidal nucleus which will produce a lowering of the energy of the 1− state in this case. From these considerations one may tentatively interpret the 1119 keV state of Gd^{152} as the lowest octupole vibrational state of this nucleus. Experimentally [7]) a spin and parity assignment of 3− has been given to this level and, furthermore, the experimental data on the 9.2 hour decay seem to rule out the presence of a 1− state of Gd^{152} at an excitation energy lower than 1119 keV. By analogy with the 1− state of Sm^{152} a level of 1− character would probably be excited by a beta-transition with a relatively low ft value (Kendall and Grodzins [7]) give $\log ft = 5.6$ for the K-capture component to the 1− state) and would decay by E1 radiations to the 0+ and 2+ states. The only level which has some of these properties is the 1320 keV state situated about 200 keV over the 3− state. Thus, the difference in nuclear structure between Sm^{152} and Gd^{152} might also be demonstrated by the evidence from the odd-parity states of these nuclei.

We wish to thank Professor Niels Bohr for excellent working

conditions at his Institute and Professor A. Bohr and Drs. B. R. Mottelson and A. K. Kerman for instructive discussions and suggestions. One of the authors (M.W.) should like to express appreciation to Vassar College for the Faculty Fellowship which made her participation in this work possible. We are much indebted to Mr. O. B. Nielsen for use of and assistance with the six-gap spectrometer and to Mr. B. S. Madsen who made available to us the gamma-gamma coincidence circuit and the kicksorter, without which the investigation could not have been performed. Finally, we gratefully acknowledge the kind help of Drs. G. W. Hutchinson and G. G. Scarrot during the construction of the kicksorter.

References

1) B. R. Mottelson and S. G. Nilsson, Phys. Rev. **99** (1955) 1615
2) R. E. Slattery, D. C. Lu and M. L. Wiedenbeck, Phys. Rev. **96** (1954) 465
3) M. L. Pool and L. L. Quill, Phys. Rev. **53** (1938) 437
4) J. M. Hill and L. R. Shepherd, Proc. Phys. Soc. A **63** (1950) 126
5) H. B. Keller and J. M. Cork, Phys. Rev. **84** (1951) 1071
6) F. S. Stephens Jr., Thesis (1955) UCRL — 2970 (unpublished)
7) L. Grodzins, Bull. Am. Phys. Soc. **1** (1956) 163
H. Kendall and L. Grodzins, Bull. Am. Phys. Soc. **1** (1956) 164
L. Grodzins, private communication
8) G. W. Hutchinson and G. G. Scarrot, Phil. Mag. **42** (1951) 792
9) O. B. Nielsen and O. Kofoed-Hansen, Dan. Mat. Fys. Medd. **29** (1955) No. 6
10) H. Slätis and K. Siegbahn, Arkiv f. Fysik **1** (1950) 339
11) J. M. Cork, H. B. Keller, W. C. Rutledge and A. E. Stoddard, Phys. Rev. **77** (1950) 848
12) E. L. Church and M. Goldhaber, Phys. Rev. **95** (1954) 626A
13) R. Katz and M. R. Lee, Phys. Rev. **85**, (1952) 1038
14) N. P. Heydenburg and G. M. Temmer, Phys. Rev. **100** (1955) 150
15) I. Bergström in Beta- and Gamma-ray Spectroscopy, edited by K. Siegbahn (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1955) p. 630
16) M. E. Rose in Beta- and Gamma-ray Spectroscopy, edited by K. Siegbahn (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1955) and privately circulated tables
17) L. Sliv and J. Band, privately circulated tables
18) A. W. Sunyar, Phys. Rev. **98** (1955) 653
19) M. E. Rose, G. H. Goertzel and C. J. Swift, privately circulated tables of L-conversion coefficients
20) S. A. Moszkowski, Phys. Rev. **82** (1951) 35
21) G. Scharff-Goldgaber and J. Weseser, Phys. Rev. **98** (1955) 212
22) K. Alder, A. Bohr, T. Huus, B. R. Mottelson and A. Winther, to be published
23) G. Alaga, K. Alder, A. Bohr and B. R. Mottelson, Dan. Mat. Fys. Medd. **29** (1955) no. 6
24) F. S. Stephens Jr., F. Asaro and I. Perlman, Phys. Rev. **100** (1955) 1543
25) F. S. Stephens Jr., F. Asaro and I. Perlman, to be published
26) S. Björnholm, O. Nathan, O. B. Nielsen and R. K. Sheline, to be published

Nuclear Physics **2** (1956/57) 575—581; *North-Holland Publishing Co., Amsterdam*

REPULSION OF NUCLEAR LEVELS

I. I. GUREVICH and M. I. PEVSNER
USSR Academy of Sciences, Moscow

Received 11 September 1956

Abstract: The size distribution of level spacings in the region of compound nucleus excitation energies of the order of the neutron binding energy is considered. By analyzing available data derived by neutron spectroscopy, it is shown that the actual size distribution of level spacings qualitatively differs from random distribution. The relative number of near-lying levels is considerably smaller than for a random distribution. The conclusion is drawn that nuclear levels "repel" each other with a distribution approaching equidistance. This conclusion is based on experimental data relating mainly to odd-mass target nuclei. Assuming naturally that only equal spin levels interact, the observed "repulsion" may prove to be less pronounced owing to overlapping of the two sets of levels.

1. Analysis of Data

Data obtained by methods of neutron spectroscopy concerning the position and parameters of nuclear levels in the region of excitation energies of the order of the neutron binding energy (see, for example, ref. [1])) make it possible to investigate empirical regularities in the behaviour of level characteristics with the aim of verifying the predictions of existing nuclear theories and of improving them. Interesting work was carried out, for example, in the investigation of size distribution of neutron widths [2]) and of radiation widths [3]) †. The problem of regularities in the location of nuclear levels and of fluctuations in the magnitude of the distance between adjacent levels has not been considered in the literature ††. From quite general considerations, however, it may be expected that levels with identical spins should be so located that there is little probability of very small spacings [4]).

In the case of purely accidental distribution of the level spacings the distribution function must have the form

$$W(E)\mathrm{d}E = \exp(-E/D)\,\frac{\mathrm{d}E}{D} \qquad (1)$$

† We are grateful to the authors of this paper for sending it to us prior to its publication.

†† The basic content of this work was reported at the Amsterdam International Conference on nuclear reactions in July, 1956. As the authors have later learned, analogous views were expressed there by D. J. Hughes in his survey.

where D is the mean value of E.

It would be most expedient to consider the data concerning the levels of one and the same spin state, i.e., relating to target nuclei with spin 0 (even nuclei). However, such nuclei have only a small number of levels that lie in the region where the resolving power of present-day methods of neutron spectroscopy is sufficient. For this reason we must not refrain from considering data obtained with target nuclei having odd atomic weight and, consequently, two sets of levels corresponding to spins $i+\frac{1}{2}$ and $i-\frac{1}{2}$ (where i is the spin of the target nucleus). It should be kept in mind that due to the superposition of the two sets of levels which correspond to different spins of the compound nucleus, the correlation existing in the position of the levels may prove less pronounced.

If distribution (1) is true for each set of levels, then the resulting distribution will have the same form with $D = d_1 \cdot d_2/(d_1+d_2)$ (d_1, d_2 being the level spacings in each system).

We used the experimental data concerning the position of the levels of In^{113}, In^{115}, Cs^{133}, Tb^{159}, Ho^{165}, Tm^{169}, Hf^{177}, Hf^{179}, Ta^{181} [1]), U^{235} [5]), and U^{238} [1]).

In order to preclude errors in the determination of E connected with the loss of levels due to the insufficient resolution of the instruments, a curve, showing the increase of the number of observed levels with the neutron energy, was plotted for each nucleide. Use was made of the levels that lie within the limits of the energy range where this growth was, on the average, linear.

For greater statistical accuracy of the experimental distribution, $x = E/D$ were computed for the levels of each isotope, and the level distribution was then plotted against x for all the enumerated nuclei (fig. 1). The total number of cases was $n = 134$. The curve corresponds to the distribution (1) normalized to the area of the histogram.

The distribution of the U^{238} levels (of the even nucleus for which 11 levels are known) and of the levels of U^{235}, for which D is, as to order of magnitude, comparable with the total width of the levels, are shown separately.

A comparison of the curve with the histogram makes it possible qualitatively to assert that the relative number of close-lying levels is small, which fact may be interpreted as a result of the "repulsion" of levels.

In order to preclude the possibility of the small relative number

of close-lying levels (with $0 < x < 0.4$) being explained by the insufficient resolution of the instruments, we selected the ex-

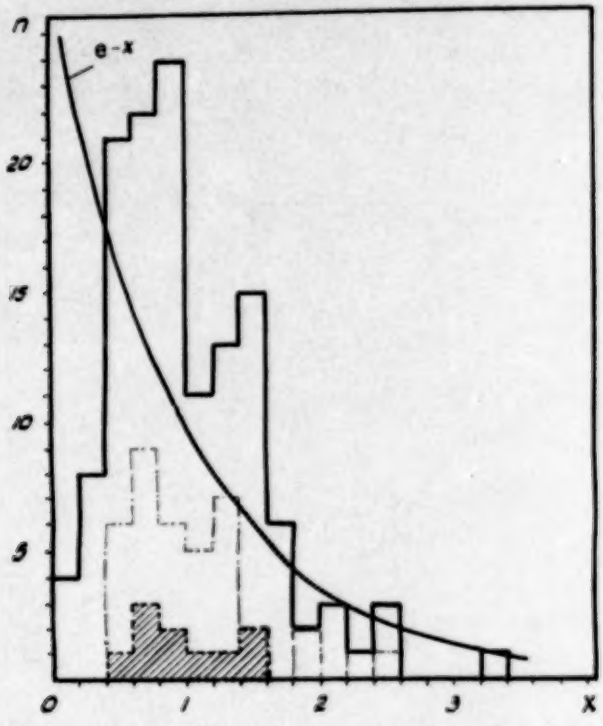

Fig. 1. Size distribution of level spacings. The shaded histogram refers to U^{238}, the histogram --- to U^{235}.

perimental data more strictly. The following were excluded from consideration:

a) cases when there might be doubt as to which of the isotopes the levels belong;

b) levels lying in the region where the full width of the resolution function ΔE does not satisfy the condition $\Delta E < 0.2D$. As a result, the total number of cases decreased from 134 to 63; of these, 19 belong to U^{235} (in the assumption that the resolution in the measurements of the Brookhaven National Laboratory that we used was equal to 0.07 μ sec/m), 7 to U^{238}, and 37 to Cs^{133}, Ho^{165}, Tm^{169}, Hf^{177}, Hf^{179}, Ta^{181}.

The corresponding histograms are given in fig. 2. The general form of the histograms, which is characterized first of all by a small relative number of cases with small x, is retained.

In order to determine whether the divergence between the experimental distribution and eq. (1) is accidental or not, the Pearson agreement criterion χ^2 (for 63 cases) was computed, with

the distribution divided into 9 classes; χ^2 proved to be 27.5, and the corresponding probability of accidental divergence $P(\chi) < 0.001$.

"Repulsion" also manifests itself in the magnitude of the root-mean-square fluctuation of the level spacings $\overline{\Delta x^2} = \overline{x^2} - \overline{x}^2$ ($\overline{\Delta E^2} = D^2\overline{\Delta x^2}$). Whereas for the distribution (1) $\overline{\Delta x^2} = 1$, in our case $\overline{\Delta x^2} = 0.31$ (for all 63 cases).

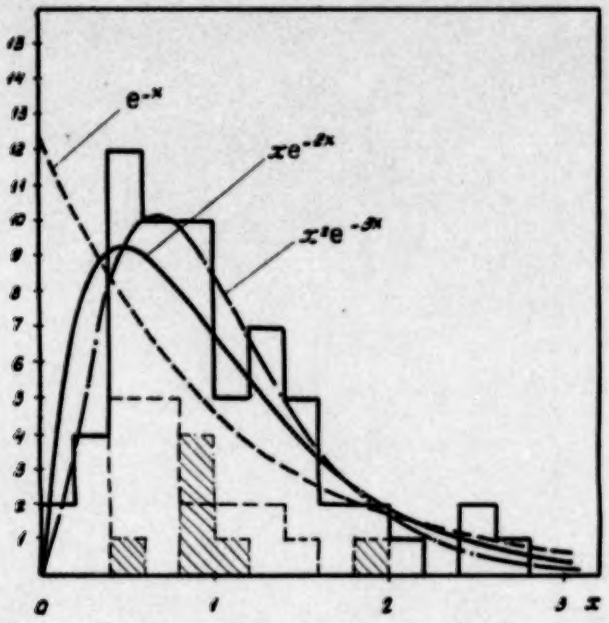

Fig. 2. Size distribution of level spacings after additional selection. The shaded histogram refers to U^{238}, the histogram --- to U^{235}.

The nuclear level interaction examined here is in its physical nature similar to the phenomenon of the non-intersection of electronic terms in the spectra of diatomic molecules. A quantum-mechanical consideration of the behaviour of molecular terms (see, for example, ref. [5]) shows that their intersection, i.e., the coincidence in the position of two terms, cannot generally take place.

From the above analysis it may be seen that the interaction of nucleons in the nucleus brings about a distribution of nuclear levels that is closer to the equidistant distribution than would be expected by accident.

2. Superposition of Sets of Levels of Different Spins

The major part of the experimental data on level spacings refers to the superposition of two sets of levels of equal parity

and of different spins. In interpreting the experimental data the following two extreme assumptions may be made:

a) the interaction of the levels of different sets is the same as that of levels within one set;

b) levels of different sets do not interact and are distributed accidentally (we believe this assumption to be the more probable one).

Let us consider assumption (b) to be correct. Then if the densities of the states of one of the two sets of levels is many times greater than the density of the second set of levels, the experimental distribution of the level spacings will, just as in the case of (a), in actuality reflect the distribution of one of the sets of levels and, therefore, the distribution function $W(E)$ for the given set of levels may be determined if we have sufficient statistical material.

The second situation in (b), when the difference in the densities of the two sets of levels is not great, may be analysed as follows. Let $W_1(E)$ and $W_2(E)$ be the distribution functions of the distances in each of the systems of levels $(W_i = d_i^{-1} f(E/d_i))$. The density of the probability of an accidentally placed level of the second system being at a distance E from the levels of the first system with a distribution function $W_1(E)$ (or vice versa) is expressed by

$$\varphi_i(E) = \frac{1}{d_i} \int_E^\infty W_i(\eta) \mathrm{d}\eta. \tag{2}$$

Indeed, let us examine the position of a level, taken at random in the second set, relative to a level of the first set. The probability of this level being between two levels of the first set, spaced η, is equal to $\eta W_1(\eta) \Delta\eta / \int_0^\infty \eta W_1(\eta) \mathrm{d}\eta = \eta W_1(\eta) \Delta\eta / d_1$. The probability of level of the second set lying at a distance $E (\leqq \eta)$ from the end of interval η equals $\Delta E/\eta$. Hence eq. (2).

The probability of a level of the second set lying at a distance greater than E from the levels of the first set (or vice versa) is

$$\psi_i(E) = \int_E^\infty \varphi_i(\eta) \mathrm{d}\eta = \frac{1}{d_i} \int_E^\infty (\eta - E) W_i(\eta) \mathrm{d}\eta;$$
$$\psi_i(0) = 1; \qquad \left. \frac{\mathrm{d}\psi_i}{\mathrm{d}E} \right|_0 = -\frac{1}{d_i}. \tag{3}$$

Hence

$$W_i(E) = \mathrm{d}_i \frac{\mathrm{d}^2\psi_i(E)}{\mathrm{d}E^2}. \tag{4}$$

Let $W(E)$ be the level spacing distribution for the system resulting from the superposition of two mutually independent level sets, and let $\Psi(E)$ be the corresponding function for this combined system, $W(E)$ and $\Psi(E)$ being related by an equation of the form (4). On the other hand the probability of a level accidentally being at distance greater than E from the levels of the combined system is expressed by the product of the respective probabilities of both subsystems. Thus,

$$\begin{aligned} W(E) &= D\frac{\mathrm{d}^2\Psi(E)}{\mathrm{d}E^2}, \\ \Psi(E) &= \psi_1(E)\,.\,\psi_2(E). \end{aligned} \tag{5}$$

The equations (5) make it possible to establish some peculiarities of the summative distribution. In particular,

$$W(0) = \frac{D}{d_1}W_1(0) + \frac{D}{d_2}W_2(0) + \frac{2D}{d_1 \cdot d_2}. \tag{6}$$

If we naturally assume that due to the level repulsion $W_{1,2}(0)=0$, then

$$W(0) = \frac{2D}{d_1 \cdot d_2} = \frac{2p}{(1+p)^2}\cdot\frac{1}{D} \tag{7}$$

where $p = d_1/d_2$ is the spacing ratio of the two sets.

Similarly,

$$\left.\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}E}\right|_0 = \frac{1+p^3}{(1+p)^3}\,\frac{f'(0)}{D^2}. \tag{8}$$

Here

$$W_i = \frac{1}{d_i} f\left(\frac{E}{d_i}\right) \quad \text{and} \quad f(0) = 0.$$

The experimental material so far available is inadequate for a detailed analysis in accordance with the scheme described above. In fig. 2 the experimental histogram is approximated by two curves $x^n\,\mathrm{e}^{-(n+1)x}(\bar{x}=1;\ \overline{\Delta x^2} = (n+1)^{-1})$ where $n = 1$ or 2. The best agreement with the experimental histogram, both for $\overline{\Delta x^2}$ and χ^2, is obtained when $n = 2$.

It should be borne in mind that this distribution corresponds to the true size distribution of level spacings when there is a noticeable difference between the level densities of the two sets

with different spins. We do not attach particular importance to $p \approx 0.1$ derived from the histogram and equation (7), because of the small statistics and the possibility of missing closely lying levels due to insufficient resolution.

When more accurate experimental data become available equation (7) may be used for determining the dependence of level density on the spin.

In conclusion we are pleased to thank S. T. Belyaev and V. M. Galitski for fruitful discussions of the problem of the accidental superposition of two sets of correlated levels.

References

1) D. J. Hughes and J. A. Harvey, Neutron Cross-Sections, BNL (1955) 325
2) J. A. Harvey, D. J. Hughes, R. S. Carter and V. E. Pilcher, Phys. Rev. **99** (1955) 10; D. J. Hughes, J. A. Harvey, Phys. Rev. **99** (1955) 1032
3) J. S. Levin and D. J. Hughes, Phys. Rev. **101** (1956) 1328
4) L. Landau and Ya. Smorodinsky, Lectures on the theory of atomic nucleus (Moscow 1956) p. 93
5) Unpublished data of BNL, kindly communicated by V. V. Vladimirsky, who received them from D. J. Hughes
6) L. Landau and E. Lifshitz, Quantum Mechanics, Vol. 1 §§ 75, 76

Nuclear Physics **2** (1956/57) 582—585; *North-Holland Publishing Co., Amsterdam*

THE COUPLING CONSTANTS OF STRONG INTERACTIONS

P. T. MATTHEWS
Department of Mathematical Physics, University of Birmingham, England
and
ABDUS SALAM
St. John's College, Cambridge, England

Received 25 September 1956

Abstract: Some formal restrictions are imposed on the strong interactions between elementary particles, which considerably reduce the number of independent interactions constants which appear in the theory of d'Espagnat and Prentki.

1. Introduction

The Gell-Mann-Nishijima [1]) scheme for strange particles seems well established by experiment and has been expressed in its most elegant form by Prentki and d'Espagnat [2]). The weakness of the latter formulation is that a considerable variety of interactions between particles are possible and the associated coupling constants are completely arbitrary. If the theory is invariant for charge-conjugation †, it can be shown that these constants are indeed all real [3]). To impose further restrictions on the magnitudes and relative signs of the coupling constants, one must look for more general invariance properties in the scheme and the obvious suggestion is to extend the manifold of isobaric spin to four dimensions. This has been tried in a variety of ways by several authors [4]). We present below a four-dimensional formulation which considerably restricts the number of arbitrary constants for strong interactions. Our approach is closest in spirit to some recent proposals of Schwinger [5]).

2. K-Meson Interactions

Since we are only concerned with isobaric spin all other variables will be suppressed. Preserving the Prentki-d'Espagnat assignment

† This now seems experimentally confirmed from the discovery of θ_1 and θ_2 particles.

of iso-spin and strangeness, we can construct the following isobaric 4-spinors,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \mathrm{p} \\ \mathrm{n} \\ \Xi^0 \\ \Xi^- \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathrm{N} \\ \Xi \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{K} = \begin{pmatrix} \mathrm{K}^+ \\ \mathrm{K}^0 \\ \overline{\mathrm{K}}^0 \\ \mathrm{K}^- \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathrm{K} \\ \overline{\mathrm{K}} \end{pmatrix},$$

where N and Ξ are the nucleon and 'cascade' spinors of the 1st and 2nd kind respectively, and K (τ or θ) is a 2-spinor of the 1st kind.

To construct a four-dimensional quantity from Λ and $\boldsymbol{\Sigma}(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$ is harder, since an iso-scalar (Λ) and a pseudo-vector ($\boldsymbol{\Sigma}$) do not go together to form either a 4-vector or a 4-pseudo-vector. We thus define the tensor $\Sigma_{\mu\nu}$ with indicated components in one particular frame †:

$$\Sigma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \Lambda & -i\Sigma_3 & i\Sigma_2 & 0 \\ i\Sigma_3 & \Lambda & -i\Sigma_1 & 0 \\ -i\Sigma_2 & i\Sigma_1 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda \end{pmatrix}.$$

It is now proposed that all heavy particles interactions are given by the single expression ††

$$L_1 = \tfrac{1}{2} g_1 \overline{\Psi} \Gamma_4 \Gamma_\mu \Gamma_\nu \mathscr{K} \Sigma_{\mu\nu} + \text{Hermitian conjugate.}$$

It is readily seen that, when broken down into its three-dimensional ("non-relativistic") form, this reduces to

$$L_1 = g_1(2\overline{\mathrm{N}}\mathrm{K}\Lambda - 2\overline{\Xi}\mathrm{K}\Lambda + \overline{\mathrm{N}}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{K} - \overline{\Xi}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{K}) + \mathrm{H.c.}$$

3. Pion Interactions

Since the pion is identical with the Σ in the iso-space, it will be represented in the physical frame by

$$\pi_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -i\phi_3 & i\phi_2 & 0 \\ i\phi_3 & 0 & -i\phi_1 & 0 \\ -i\phi_2 & i\phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

† $\Sigma_{\mu\nu}$ may presumably be any tensor, subject to the condition $\Sigma_{\gamma 4} = \Sigma_{4\gamma}$. From this point of view one should set $\Lambda = \frac{1}{4}\mathrm{tr}\,\Sigma$. Conservation of charge further demands that only those transformations should be allowed in [4] iso-space, which preserve $\Sigma_{\gamma 4} = \Sigma_{4\gamma}$. This is a severe restriction, allowing in effect only [3] rotations and reflections. In this sense we are marrying, in Pauli's phrase, "what God hath rent asunder".

†† The Γ_μ satisfy $\Gamma_\mu\Gamma_\nu + \Gamma_\nu\Gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$ and refer to iso-space; $\overline{\Psi} = \Psi^* \gamma_4$ where γ_4 refers to ordinary space.

The natural way to write the interactions of this field seems to be

$$L_2 = \tfrac{1}{2}g_2\overline{\Psi}\Gamma_4\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Psi\pi_{\mu\nu},$$
$$L_3 = \tfrac{1}{2}g_3\overline{\mathcal{K}}\Gamma_4\Gamma_\mu\Gamma_\nu\mathrm{K}\pi_{\mu\nu},$$
$$L_4 = \tfrac{1}{2}g_4\Delta(\pi\mu\nu\varrho\alpha\beta)\overline{\Sigma}_{\pi\mu}\Sigma_{\nu\varrho}\pi_{\alpha\beta}.$$

Here $\Delta(\pi\mu\nu\varrho\alpha\beta) = \frac{1}{4}\sum \varepsilon\delta_{ab}\delta_{cd}\delta_{ef}$, more familarly known to physicists in the form (1/16) tr $[\gamma_\pi\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\varrho\gamma_\alpha\gamma_\beta]$. ($a \ldots f$ is a permutation of $\pi \ldots \beta$, and ε is the signature of the permutation.) In their 3-dimensional forms, L_2 and L_4 read

$$L_2 = g_2[\overline{\mathrm{N}}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi})\mathrm{N} - \overline{\Xi}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi})\Xi],$$
$$L_4 = g_4[i\overline{\boldsymbol{\Sigma}}\wedge\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{\pi} + \overline{\Lambda}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{\pi} + \overline{\boldsymbol{\Sigma}}\cdot\boldsymbol{\pi}\Lambda],$$

which again combine the Prentki-d'Espagnat interactions in a specific way.

4. Electro-magnetic Interactions

It is interesting to note that we can continue in the same spirit and suppose that the electromagnetic field is represented in iso-space by a tensor A_μ, which in the physical frame has only one component $A_{33} = A$ different from zero. The $\Sigma - A$ interaction is correctly given by

$$L_5 = \tfrac{1}{2}e[\Delta(\mu\nu\pi\varrho\alpha\beta)\overline{\Sigma}_{\mu\nu}\Sigma_{\pi\varrho}A_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{4}\overline{\Sigma}_{\mu\mu}\Sigma_{\pi\pi}A_{\alpha\alpha}]$$

which is closely related to the expression for L_4, the additional term in L_5 vanishing when A is replaced by π. To write the nucleon-cascade interaction in the [4] form, we have to make use of the alternative possibility of writing the electromagnetic field as a degenerate pseudo-vector $A_\mu = (0, 0, iA, 0)$. Then

$$L_6 = \tfrac{1}{2}e[\overline{\Psi}\Gamma_4\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Psi A_{\mu\nu} - \overline{\Psi}\Gamma_4\Gamma_\mu\Gamma_5\Psi A_\mu].$$
$$= e\left[\overline{\mathrm{N}}\frac{1+\tau_3}{2}\mathrm{N}A - \overline{\Xi}\frac{(1-\tau_3)}{2}\Xi A\right].$$

5. Additional Pion Interaction

The necessity for two forms for the electromagnetic field suggests we might employ two forms for the pion-field as well. (This is not true for the $\boldsymbol{\Sigma}$, Λ field.) We may introduce the pseudo-vector $\pi_\mu = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, 0)$ and the extra pion-nucleon-cascade interaction

$$L_7 = -g_5\overline{\Psi}\Gamma_4\Gamma_\mu\Gamma_5\Psi\pi_\mu$$
$$= g_5[\overline{\mathrm{N}}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}\mathrm{N} + \overline{\Xi}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi})\Xi].$$

This additional freedom is unattractive and is equivalent to the Prentki-d'Espagnat theory for these interactions, in which the pion-nucleon and pion-cascade interactions have arbitrary independent coupling constants. However, if one accepts the arguments given by Schwinger [5]), that the large mass difference between nucleon and cascade is due to the vanishing of the pion-cascade interaction, then $g_2 = g_5$. As far as the number of coupling constants is concerned, this restores the status quo of section 3.

6. Conclusion

By insisting that all strong interactions should formally be expressed in a four-dimensional form, we have reduced the number of coupling constants and their relative signs in the Prentki-d'Espagnat formulation of the Gell-Mann-Nishijima scheme. The four arbitrary constants of the strong interactions not involving the pion are replaced by a single one. Two more determine the pion interactions with hyperons and K-particles and finally one has the familiar pion-nucleon coupling constant. These four replace the nine of the Prentki-d'Espagnat theory.

As presented here, the form of the interaction has nothing but aesthetics to recommend it. However, it is an attractive feature that the known electromagnetic interactions can be expressed very simply in the form which we require for all interactions. If it can be assumed that the strong interactions, other than the pion-nucleon, are sufficiently weak to obtain reasonable results from perturbation theory, then a more direct experimental check of the scheme proposed here may be possible. Work along these lines is in progress.

References

1) M. Gell-Mann, Proc. Glasgow Conference (1954)p. 342
K. Nishijima, Prog. Theor. Phys. **10** (1953) 581
2) Prentki and d'Espagnat, Nuclear Physics **1** (1956) 33
3) A. Salam, Nuclear Physics **2** (1956) 173
4) A. Pais, Proc. Nat. Acad. Sci. **40** (1951) 835
A. Salam and J. C. Polkinghorne, Nuovo Cimento **2** (1955) 685
5) J. Schwinger, On the properties of K-mesons (to be published)

Nuclear Physics **2** (1956/57) 586—592; *North-Holland Publishing Co., Amsterdam*

MAGNETIC MOMENTS OF NUCLEI AND THE NUCLEAR MANY-BODY PROBLEM

J. S. BELL, R. J. EDEN† and T. H. R. SKYRME

Atomic Energy Research Establishment, Harwell, Nr. Didcot, Berks

Received 26 September 1956

Abstract: In recent work on the nuclear many-body problem momentum-dependent potentials have been used to describe the motion of individual particles, and this has led to some uncertainty in regard to electromagnetic interactions, especially magnetic moments. In this paper the causes of momentum dependence of the potentials are discussed, and it is shown that some of these do not lead to any change in magnetic moments, whilst others may affect them but not simply in the way indicated by the 'reduced mass' approximation to the potentials. The magnetic moment operator is in any case ambiguous in that it involves the unknown functions familiar from studies of exchange currents.

1. Introduction

The work of Brueckner and others [1, 2, 3, 4]) has led to a representation of the wave-function for a nucleus in terms of a model operator acting on a simple model wave-function. The model describes independent motion of each nucleon in a potential well and is designed to have approximately the same energy as the actual nucleus.

The model operator modifies the Slater determinant, representing the individual particle motion, by introducing correlations between the positions of different nucleons. These correlations have a strong influence on high energy reactions (see for example ref. 5); but it has been suggested [6]) that they should be relatively unimportant for those effects which appear to be described well by the simple shell model, and these include magnetic moments.

According to the many-body theory the potential well for the ndividual particle motion should be momentum-dependent; and this can be confirmed empirically, for example by comparison of the binding energy of the 'topmost' nucleon in a nucleus with that of the 'average' nucleon [7]). For some calculations [8]) this momentum dependence can conveniently be represented approximately by the

† Permanent address: Dept. of Theoretical Physics, The University, Manchester.

use of a reduced mass m^* for the single particles; empirically [7]) m^* should have a value around one half of the actual nucleon mas m.

In the fundamental equations that describe the system (including, when necessary, the meson fields), gauge invariance requires that the electromagnetic interaction should enter in a form obtained by replacing momenta $\mathbf{p}$ by $\mathbf{p}-(e/c)\mathbf{A}$. The naive, and incorrect, use of this prescription in the single particle equations would suggest that the gyromagnetic ratio of a proton † in a nucleus should be increased in the ratio m/m^*. This would indeed seem to be in direct conflict with the experimental fact that nuclear magnetic moments lie within, and roughly parallel to, the Schmidt lines, as usually calculated [9]).

To examine this question properly one must distinguish between different causes of the momentum dependence of the potential. In the first place with weak, non-singular static interactions between pairs of nucleons, when the actual and model wave-functions differ little, the momentum-dependence is just an expression of the non-local character of the single particle potential obtained from the Hartree-Fock self-consistent equations; then, as we shall shew in section 3, there is no change in the electromagnetic interaction.

In the second place with stronger and singular interactions, additional momentum-dependence enters through the replacement, according to the many-body theory, of the actual static potential by an energy-dependent pseudo-potential related to the scattering matrix. In the third place the original two-body interaction may not be static, including as a special case an exchange interaction. These effects cannot easily be discussed in generality, and in section 4 we illustrate some of the possibilities with the help of some additional assumptions.

2. Formal Statement of the Problem

If it is assumed that only two-body interactions are important, the nuclear wave-function must satisfy the Schrödinger equation

$$[(\sum_{i=1}^{A}(-\hbar^2/2m)\nabla_i^2+\sum_{i<j}^{A}v_{ij}]\Psi(1,\ldots A)=E\Psi(1,\ldots A). \quad (2.1)$$

A direct Hartree-Fock approximation to the solution of this equation is unsatisfactory for a realistic interaction v which contains

† The gyromagnetic ratio of the proton has been discussed in an unpublished preprint by K. A. Brueckner, who concluded that there was no simple relation between its value and the value of m^*.

singular parts, such as a repulsive core; and according to the many-body theory [1, 2, 3, 4]) the solution should be developed in the form

$$\Psi(1, \ldots A) = F\Phi(1, \ldots A) \tag{2.2}$$

where Φ is a determinant of single-particle wave-functions $\phi_n(i)$ which satisfy a single-particle equation

$$[E_n + (\hbar^2/2m)\nabla_i^2]\phi_n(i) = \int (i|V|i')\phi_n(i')\mathrm{d}i' \tag{2.3}$$

and where F is the 'model operator' that introduces into the actual wave-function the local correlations between pairs of nucleons. The self-consistent determination of the potential V and the form of F have been discussed elsewhere [1, 2, 3, 4]).

The magnetic dipole moment of the nucleus is given by the expectation value, for the true wave-function, of the dipole operator $\mathbf{M}$. The one-particle parts of $\mathbf{M}$ are the usual orbital and spin contributions from individual nucleons [9]); in addition $\mathbf{M}$ may contain contributions from exchange currents [9, 10, 11]), which, except for a longitudinal part, cannot be determined unambiguously from the v_{ij}.

When the wave-function is expressed in the form (2.2), the moment is

$$\mu = (F\Phi, \mathbf{M}F\Phi)/(F\Phi, F\Phi) \tag{2.4}$$

and the problem is to evaluate the equivalent operator $\mathbf{M}^*$ such that

$$\mu = (\Phi, \mathbf{M}^*\Phi)/(\Phi, \Phi). \tag{2.5}$$

Alternatively we can return to the definition of μ in terms of the energy change in a magnetic field, and recalculate the energy of the system in a weak field; this is appropriate here because the theory is designed primarily to calculate energies. These methods should of course lead to the same result if no terms are neglected.

3. First Approximation

To consider the first cause of momentum-dependent potentials we shall suppose to begin with that the potentials are weak and do not involve exchange, and that the Hartree-Fock method is applied directly to the Schrödinger equation (2.1). In a sense, then, $F = 1$ and we might expect that $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}$, but care is needed because the variational method defines the energy better than the wave-function.

If $\mathscr{H}$ is the Hamiltonian in the absence of a magnetic field and Φ is the Hartree-Fock determinantal wave-function, then the energy of the system is approximated by

$$E = (\Phi, \mathscr{H}\Phi). \tag{3.1}$$

In the presence of a magnetic field $\mathbf{H}$, the change in the Hamiltonian is $-\mathbf{M}\cdot\mathbf{H}$ and if $\delta\Phi$ is the change in the Hartree-Fock wave-function, the energy change is

$$\delta E = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{H} = (\delta\Phi, \mathscr{H}\Phi)+(\Phi, \mathscr{H}\,\delta\Phi)+(\Phi, -\mathbf{M}\cdot\mathbf{H}\Phi). \tag{3.2}$$

The first two terms on the right vanish however because the energy E defined by (3.1) is a minimum with respect to all wave-functions of the determinantal class. This verifies that within the limits of the approximation the magnetic dipole operator is unchanged.

The single-particle potential matrix $(\mathbf{r}|V|\mathbf{r}')$ obtained from this approximation is given by

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}|V|\mathbf{r}') = {} & \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\Sigma\int \phi_m^*(\mathbf{r}'')v(\mathbf{r}-\mathbf{r}'')\phi_m(\mathbf{r}'')\mathrm{d}\mathbf{r}'' \\ & +\Sigma\phi_m(\mathbf{r})\phi_m^*(\mathbf{r}')v(\mathbf{r}-\mathbf{r}').\end{aligned} \tag{3.3}$$

If, as we have assumed, v is an ordinary potential, ϕ_m must describe a nucleon state with the same charge as the ϕ_n, say, upon which V operates, so that the second term in (3.3) transforms in just the right way under a gauge transformation to ensure that $(\mathbf{r}|V|\mathbf{r}')\phi_n(\mathbf{r}')$ transforms properly, i.e. as $\phi_n(\mathbf{r})$.

In general the states ϕ_m will depend on the strength of the magnetic field and so therefore will the non-local part of V. Accordingly the single particle levels E_n, determined by (2.3), may show anomalous magnetic moment effects, but these are not physically meaningful since they disappear in the expression for the total energy of the system.

The general argument, within the limits of the Hartree-Fock approximation, derived from eq. (3.2) is valid also when exchange forces are present provided only that $\mathbf{M}$ contain also the proper exchange current terms; but, as is well known, these are not uniquely determined by the assumed potentials.

4. Higher Order Effects

When the dipole operator $\mathbf{M}$ has been defined, $\mathbf{M}^*$ can be constructed without ambiguity from (2.4) but there appears to be no reason why it should be deducible only from the two-body

pseudopotential or from the single particle potential V; ambiguities can arise similar to those connected with exchange currents. And while in the latter case the spin-independent part can be found unambigously, on the assumption that it is static, there is nothing to exclude, for example, two body terms such as

$$(e_1+e_2)(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)+(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)f(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)$$

from appearing in higher order corrections to the dipole moment.

In this section we shall look for an estimate of the way in which the magnetic moment may be corrected, by making two assumptions:

(i) The energy of the system is equal to the Hartree-Fock energy of an equivalent system in which the singular potentials have been replaced by smooth energy-dependent pseudo-potentials.

(ii) The changes in the pseudo-potentials due to the presence of a field are taken in the 'simplest' form compatible with gauge invariance.

These assumptions cannot be completely correct, but the errors can only be discussed in conjunction with the whole apparatus of the many-body theory.

The pseudo-potential will be taken in the form of an energy-dependent point interaction between pairs of nucleons, as has been introduced elsewhere [12]), given by

$$\begin{aligned} t_{ij} = {} & t_a\delta(x_i-x_j)-t_b(\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_j)\delta(x_i-x_j)(\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_j) \\ & +\tfrac{1}{2}t_c[\delta(x_i-x_j)(\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_j)^2+(\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_j)^2\delta(x_i-x_j)] \end{aligned} \tag{4.1}$$

and it will be assumed that t_b and t_c are constant numbers, independent of spin operators. The total potential energy is then given in the Hartree-Fock approximation by the expectation value of

$$\tfrac{1}{2}\sum_{ij} t_{ij}(1-P^x_{ij}P^\sigma_{ij}P^\tau_{ij}) \tag{4.2}$$

calculated for a simple product wave-function. When this is evaluated for a large nucleus, with equal numbers of neutrons and protons, it is found [12]) that the effective mass is given by

$$1/2m^* = 1/2m+\varrho\left((3/4)t_c+(5/4)t_0\right). \tag{4.3}$$

In accordance with the second assumption, it will be supposed that in an electromagnetic field t_{ij} is modified only by the replacement of $\mathbf{p}_i$ by $\mathbf{p}_i-(e_i/c)\mathbf{A}(x_i)$; accordingly the first order interaction terms are

$$\delta t_{ij} = -(t_c - t_b)(e_i - e_j)[\delta(x_i - x_j)\mathbf{A}\cdot(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) + (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)\cdot\mathbf{A}\delta(x_i - x_j)] \tag{4.4}$$

and the corresponding energy shift, calculated as before for equal numbers of protons and neutrons, is the expectation value of

$$-2\varrho(t_c - t_b)\sum_i (e_i - 1/2e)\mathbf{A}\cdot\mathbf{p}_i \tag{4.5}$$

calculated for a product wave-function.

It will be noticed that this vanishes when $t_b = t_c$, and this happens when (4.1) is regarded as an approximation to a static non-exchange potential, in agreement with the general result of the preceding section. It can also be verified that when (4.1) approximates a Majorana potential (when $t_b = -t_c$), (4.5) agrees with the usual result found from the exchange current.

If we combine (4.3) and (4.5) we see that the gyromagnetic ratio of a proton in a large nucleus would be altered in the ratio

$$1 + (m/m^* - 1)[1/2\cdot(t_c - t_b)/(3/4t_c + 5/4t_b)]. \tag{4.6}$$

A numerical estimate based on the empirical value of m/m^* and on the magnitude of the nuclear surface effects gives a value between 1.2 and 1.3; the effect would be somewhat smaller for the topmost nucleon which moves mostly in a region of less than average density.

5. Conclusions

In so far as the momentum dependence of the single particle potential well arises from the use of the Hartree-Fock variational method to find the best determinantal wave-function it has no effect on electromagnetic interactions and the magnetic moment is to be calculated from the usual dipole operator, including exchange currents. Except for a single particle outside a closed shell, the wave function will be a sum of determinants, fixed by the solution of a secular equation, rather than a single determinant, but the argument of section 3 applies equally to this case.

But inasmuch as the momentum dependence arises from the singular and higher order effects of the two-body potential, no simple answer is possible, except that the naive use of the factor (m/m^*) is quite unjustifiable. If the additional assumptions of section 4 are made a result is obtained depending only on the form of the equivalent pseudopotential; in particular the momentum

dependence can be simulated by a suitable exchange character, and the result we find is equivalent to that well-known in the discussion of exchange moments.

References

1) K. A. Brueckner and C. A. Levinson, Phys. Rev. **97** (1955) 1344
2) R. J. Eden, Proc. Roy. Soc. A **235** (1956) 408
3) H. A. Bethe, Phys. Rev. (to be published)
4) J. Goldstone, Proc. Roy. Soc. A (to be published)
5) K. A. Brueckner, R. J. Eden and N. C. Francis, Phys. Rev. **98** (1955) 1445
6) R. J. Eden and N. C. Francis, Phys. Rev. **97** (1955) 1366
7) R. J. Blin–Stoyle, Nuclear Physics **2** (1956/57) 169
8) K. A. Brueckner, Phys. Rev. **97** (1955) 1353
9) R. J. Blin-Stoyle, Rev. Mod. Phys. **28** (1956) 75
10) A. F. Siegert, Phys. Rev. **52** (1937) 787
11) R. K. Osborne and L. L. Foldy, Phys. Rev. **79** (1950) 795
12) T. H. R. Skyrme, Phil. Mag. (to be published)

Nuclear Physics **2** (1956/57) 593—618; *North-Holland Publishing Co., Amsterdam*

ETUDE DE LA TRANSMUTATION DU CUIVRE PAR L'AZOTE ET L'OXYGENE

J. BEYDON, R. CHAMINADE, M. CRUT †,
H. FARAGGI, J. OLKOWSKY et A. PAPINEAU

Centre d'Études Nucléaires de Saclay, Gif-sur-Yvette

Reçu le 28 septembre 1956

Abstract: The transmutations of Cu bombarded by N and O ions are studied, both for natural Cu and for the separated isotopes ^{63}Cu and ^{65}Cu. The results are summarized in table 2, or in the fig. 8 and 9. Most reactions take place through fusion of the colliding nuclei.

New γ-rays: ^{73}Se, 50 keV, $T \approx 10$ d; ^{75}Br, 285 ± 5 keV, $T \approx 95 \pm 5$ min; ^{74}Br, 640 ± 10 keV, $T \approx 42 \pm 5$ min. New isotope: ^{79}Rb, β^+ emitter, $T = 24 \pm 1$ min, at least one γ-ray of 150 keV.

1. Introduction

L'intérêt présenté par les ions lourds, en tant que projectiles, pour la formation d'éléments nouveaux, s'est clairement manifesté au cours des dernières années, particulièrement dans le domaine des transuraniens et dans la formation de nucléides déficients en neutrons. Il est apparu ainsi qu'il était souvent possible de réaliser l'addition complète des protons constituant le projectile et le noyau-cible. C'est ainsi qu'on a pu former l'élément $Z = 99$ [1]) en bombardant l'uranium ($Z = 92$) par l'azote ($Z = 7$) et l'élément $Z = 100$ [2]) en bombardant ce même uranium par l'oxygène. Un certain nombre de neutrons sont alors émis. On trouvera dans l'article de D. H. Walker [3]) un exposé complet des travaux effectués avant 1955 à l'aide d'ions lourds accélérés. Il est facile de constater que peu de renseignements ont été obtenus jusqu'à présent sur le mécanisme de ces transmutations.

Il est possible, en effet, d'imaginer plusieurs modes d'interaction d'un ion lourd et d'un noyau.

1) Il peut y avoir, de même que pour les projectiles plus simples habituellement utilisés, formation d'un „noyau composé", par fusion complète des deux noyaux. Ce noyau composé peut se dés-

† Actuellement détachée de l'Institut du Radium.

intégrer soit par fission, soit par évaporation de plusieurs nucléons. L'énergie d'excitation apportée par les ions lourds habituellement accélérés dans les cyclotrons à fréquence fixe est de l'ordre de quelques dizaines de MeV alors que l'énergie par nucléon n'est que de quelques MeV. S'il y a formation d'un noyau composé au sens habituel du terme, on devrait se trouver dans les conditions prévues par la théorie statistique des réactions nucléaires à moyenne énergie, et l'étude de ces transmutations permettrait d'en contrôler la validité.

Les expériences de Reynolds et Zucker [4]) sur les noyaux légers ont montré que, dans ce domaine, la formation d'un noyau composé était un phénomène relativement fréquent. Toutefois certaines réactions semblent relever plutôt d'un mécanisme d'échange de nucléons.

2) Il est possible également que les ions lourds de grande énergie ne se comportent pas comme des projectiles uniques, mais qu'une partie seulement de leurs nucléons interagissent séparément avec les noyaux cibles rencontrés. L'ion serait en quelque sorte dissocié en plusieurs projectiles agissant plus ou moins indépendamment: l'analogie avec un jet de chevrotine a amené Chackett, Fremlin et Walker à proposer le nom de "buckshot" pour schématiser ce mécanisme [5]) qui se rencontre en particulier dans les réactions de l'azote sur l'aluminium.

Il est difficile de conclure — les résultats n'étant pas directement comparables — des quelques expériences faites jusqu'ici, en faveur d'un schéma unique pour les transmutations provoquées par ions lourds.

Nous disposons, à Saclay, d'un cyclotron à fréquence fixe [6]) de 1.60 m de diamètre permettant des irradiations internes par des ions d'azote et d'oxygène six fois chargés. Il nous a paru intéressant d'utiliser ces ions à l'étude de la transmutation du cuivre, en essayant de dresser un tableau aussi complet que possible des éléments formés, ainsi que de leur abondance relative.

Nous avons choisi d'étudier le cuivre pour les raisons suivantes: beaucoup des éléments du cyclotron étant constitués par du cuivre, il faut s'attendre à trouver les produits de transmutation du cuivre comme contaminants des autres éléments étudiés. Or, il semble qu'il n'existe pas, jusqu'à présent, d'étude systématique des réactions d'ions lourds sur le cuivre. Seul, Hollander [7]) a utilisé la transmutation du cuivre par le carbone à la mise en évidence d'un nouvel isotope du brome, brome 74. Il semble se présenter là un mécanisme

d'addition, sans que l'on sache si ce mécanisme est prédominant. Par ailleurs, Greenlees [8]) a signalé la formation d'arsenic, comme produit de contamination des cibles irradiées dans le cyclotron de Birmingham et a confirmé que cet arsenic était dû à l'action de l'azote sur le cuivre des supports. Il a utilisé cette réaction pour étudier les propriétés de l'arsenic ainsi formé. Enfin, les études faites jusqu'à présent ayant porté essentiellement sur les éléments légers ou les éléments lourds, il nous a paru intéressant de regarder le comportement d'un élément de Z moyen.

Il nous a donc semblé utile de dresser le tableau d'ensemble des réactions de l'azote et de l'oxygène sur le cuivre.

La réaction d'addition de l'azote 14 sur les deux isotopes 63 et 65 du cuivre conduirait, s'il y a formation d'un noyau composé, aux kryptons 77 et 79. Seuls des éléments de nombres de masse inférieurs ou au plus égaux à 77 et 79 peuvent donc être observés. Le bombardement par l'oxygène 16 formerait au maximum des rubidiums de masse 79 ou 81. La fig. 1 reproduit la table des radioéléments connus dans la région, ainsi que les filiations radioactives susceptibles d'être observées. Un mécanisme d'addition suivie d'évaporation conduirait aux éléments voisins du krypton ou du rubidium. Un mécanisme du type buckshot devrait se traduire par des éléments voisins du cuivre et voisins de l'azote ou de l'oxygène. Un mécanisme de fission devrait conduire à des éléments voisins du calcium.

2. Principe des Expériences

Nous avons procédé à des irradiations internes, utilisant les faisceaux d'azote 14 et d'oxygène 16. Les cibles étaient constituées soit de cuivre naturel, soit de cuivre 63, soit de cuivre 65. Les isotopes nous ont été fournis, d'une part, par le séparateur du C.E.A., d'autre part, par A.E.R.E., Harwell.

Dans chaque cas, nous avons cherché à identifier, par leur rayonnement de radioactivité, les produits formés et à mesurer leur abondance relative.

On ne tient évidemment pas compte:

1) de la formation des nucléides stables,

2) des nucléides dont les périodes seraient inférieures à quelques minutes ou supérieures à quelques semaines (sauf exception), dont nos appareillages ne permettent pas la détection,

3) des nucléides se désintégrant uniquement par capture K, sans émission de rayons γ.

Toutefois, les résultats obtenus permettent de dresser un tableau suffisamment étendu des produits radioactifs obtenus, pour qu'il soit possible de tirer quelques conclusions valables.

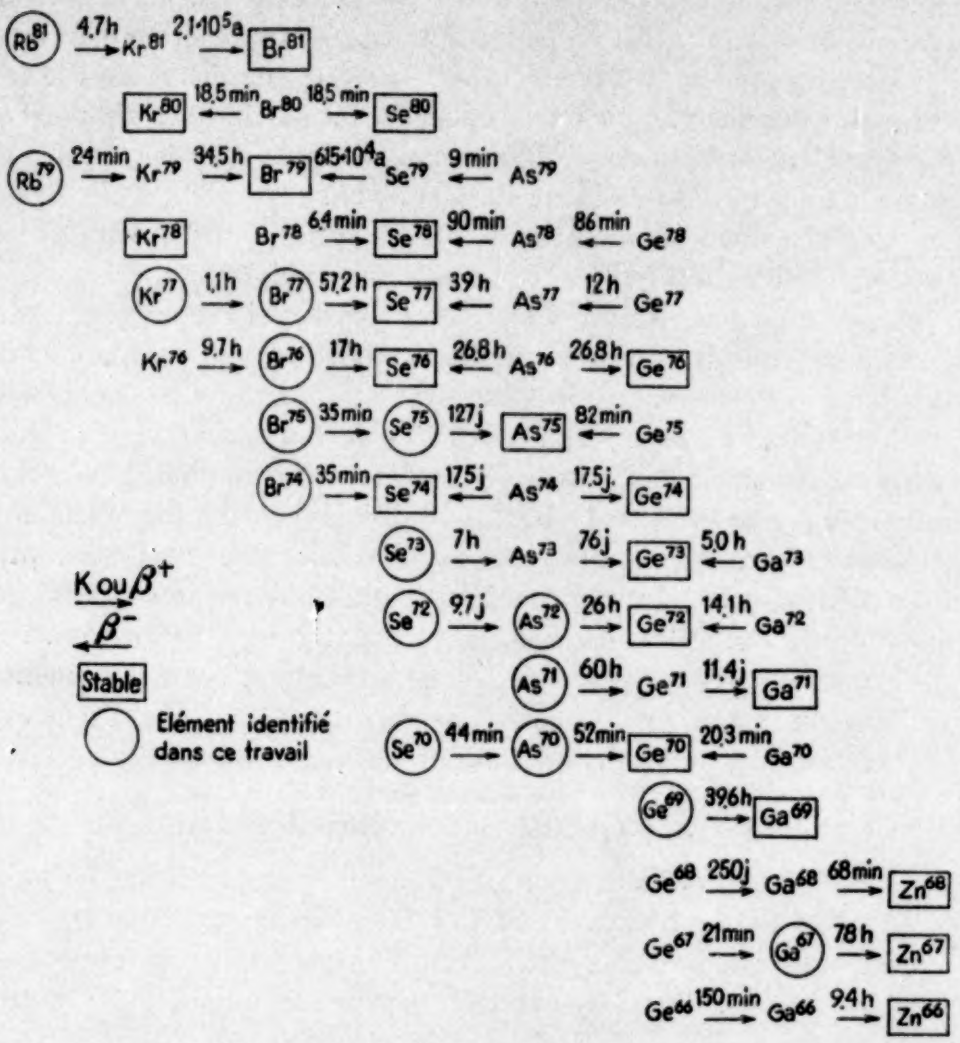

Fig. 1. Table des radioéléments connus et des filiations radioactives susceptibles d'être observées pour les réactions Cu+O et Cu+N.

Les nucléides étaient identifiés par leurs propriétés chimiques, par le signe et la période de leur activité β, par la période et l'énergie des rayonnements γ émis et éventuellement par les filiations radioactives. Tous ces éléments étant acquis, il devenait possible d'identifier chaque élément dans les feuilles de cuivre irradiées et non traitées chimiquement, en suivant l'évolution dans le temps des rayonnements γ émis. Il nous a donc été possible d'établir les rendements relatifs en cibles épaisses par différentes voies:

a) à partir des activités β des éléments séparés chimiquement,

b) à partir des activités γ des mêmes éléments,

c) à partir des activités γ mesurées sur les cibles non traitées chimiquement.

Au cours de cette étude, nous nous sommes heurtés à un certain nombre de difficultés:

a) Les nucléides formés sont généralement des émetteurs β^+, assez fortement déficients en neutrons et qui, souvent, se transforment les uns dans les autres par filiations radioactives. Pour établir les rendements relatifs d'un élément donné, il fallait séparer expérimentalement l'activité formée directement par l'irradiation de celle due à la décroissance d'un nucléide voisin.

L'extraction chimique périodique de la substance-fille permet de résoudre ce problème mais conduit à des imprécisions notables lorsque les périodes sont relativement courtes.

b) Pour remonter des activités observées au nombre de noyaux formés dans la transmutation, il est nécessaire de connaître, pour chaque nucléide, le schéma exact de la désintégration. Or, les éléments déficients en neutrons ont été peu étudiés jusqu'à présent, et les schémas de désintégration sont souvent peu ou mal connus. Lorsque le schéma n'est pas connu, l'activité mesurée permet seulement de fixer une limite inférieure au nombre de noyaux formés dans la réaction.

Au cours de cette étude, il nous a été donné d'attribuer de nouvelles raies aux éléments suivants:

^{72}Se: 50 keV, $T \approx 10$ jours;

^{75}Br: 285 ± 5 keV, $T \approx 95 \pm 5$ min;

^{74}Br: 640 ± 10 keV, $T \approx 42 \pm 5$ min.

D'autre part, nous avons pu confirmer [9]) la mise en évidence d'un isotope nouveau du rubidium de masse 79, de période 24 ± 1 min, émetteur β^+ et ayant au moins une raie γ à 150 keV.

Nous exposerons les méthodes expérimentales utilisées pour identifier les produits formés au cours des réactions et mesurer leurs rendements relatifs. Puis nous donnerons les tableaux des résultats obtenus et nous discuterons des interprétations que l'on peut en faire.

3. Méthodes Expérimentales

3.1. CONDITIONS D'IRRADIATION

Nous avons utilisé des feuilles de cuivre pesées, d'environ 3 mg/cm^2, ayant une surface d'environ 2 cm^2. Pour l'irradiation,

plusieurs feuilles constituaient un empilement fixé à l'extrémité de la tige isolée servant à la mesure du courant transporté par le faisceau d'ions.

L'utilisation d'empilements de feuilles, de préférence à une feuille unique plus épaisse, permettait une dissolution plus rapide des cibles lors des traitements chimiques ultérieurs.

Une autre feuille était fixée sur la fenêtre d'entrée et arrêtait la composante molle correspondant aux ions accélérés à l'état de charge 2.

Le spectre d'énergie des ions utilisés est continu, l'énergie de la plupart d'entre eux étant comprise entre 25 et 60 MeV.

3.2. MÉTHODES CHIMIQUES

La cible était coupée en 2 fragments. L'un des fragments servait de référence, l'autre était utilisé pour les séparations chimiques. Nous avons opéré de deux manières, suivant les éléments à rechercher:

1) Le plus souvent, attaque du morceau de cuivre par NO_3H dilué dans une fiole bouchée, en évitant soigneusement un trop fort dégagement de vapeurs nitreuses qui pourrait causer une perte en brome, et recherche des éléments sur des fractions prélevées par pipettage.

2) Dans certains cas (recherche de l'azote et du krypton) partage du fragment en plusieurs morceaux, comparaison de leurs activités respectives et recherche des éléments sur ces morceaux.

Les séparations chimiques étaient faites après addition à la solution des entraîneurs nécessaires ajoutés en quantités connues à partir de solutions titrées (de l'ordre de 10 à 20 mg de chaque élément). Les précipités finaux étaient filtrés sur des papiers tarés et pesés après séchage. On mesurait ensuite leurs activités β et γ.
Les méthodes chimiques employées étaient les suivantes:

1) *Rubidium.* Le rubidium était précipité et pesé à l'état de perchlorate, directement ou après avoir enlevé les sulfures, hydroxydes, carbonates insolubles et chassé les ions NH_4^+ par ébullition à la soude. Seul le potassium peut suivre cette chimie.

2) *Brome.* L'entraîneur était introduit sous forme de bromate, quelquefois avant l'attaque de la cible; il était réduit en Br^- par SO_2, oxydé en Br_2 par MnO_4K, extrait par CCl_4, réduit à nouveau par SO_2, précipité et compté en BrAg. (Nous avons aussi quelquefois précipité directement le brome de la solution à l'état de BrAg après

réduction du bromate en bromure par SO_2, mais le précipité obtenu contenait souvent un peu d'activité due au sélénium).

3) *Ge, Ga, Se, As, Cu* (*Périodes Longues*). Ces éléments étaient le plus souvent séparés successivement sur une même fraction de la solution. Après avoir chassé NO_3H de la solution, le germanium était distillé à l'état de chlorure en milieu chlorhydrique sous courant de chlore, précipité et pesé à l'état de sulfure. Le résidu non distillé était extrait par l'éther en milieu HCl 6 *n*, la phase organique était lavée plusieurs fois par HCl *6 n*, le gallium réextrait à l'eau, précipité et pesé à l'état d'ortho-oxyquinoléate de gallium.

De la phase acide restante, le sélénium était précipité à chaud par une solution de chlorhydrate d'hydrazine et de sulfite et pesé à l'état de Se. La séparation du sélénium devait être quantitative sinon on le retrouvait avec l'arsenic; aussi faisions-nous le plus souvent une deuxième précipitation du sélénium dans la solution. L'excès de SO_2 était chassé du filtrat par un courant d'air, puis l'arsenic était précipité à chaud par l'hypophosphite de sodium et pesé. Après filtration de l'arsenic le cuivre était précipité par KOH, redissous dans SO_4H_2, précipité et pesé à l'état de sulfocyanure cuivreux.

4) *Ge, Ga, Se, As, Cu* (*Périodes Courtes*).

a) Le *germanium*, le *gallium*, le *sélénium* étaient séparés par les mêmes méthodes que précédemment, mais appliquées directement sur une fraction de la solution, sans séparation préalable des autres éléments.

b) *Arsenic*. Dans la solution évaporée à sec et rendue HCl 6 *n*, on précipitait AsI_3 par INa en même temps que Se et CuI; AsI_3 était extrait par $CHCl_3$, puis séparé de la phase organique par HCl 3 *n*, précipité et pesé à l'état de sulfure.

c) *Cuivre*. Pour une séparation très rapide (Cu de période 5 min) on précipitait, dans la solution nitrique contenant moins de 10 mg de cuivre, un hydroxyde de fer par l'ammoniaque, sans mettre d'entraîneur de sélénium, ni d'arsenic; puis le cuivre était précipité du filtrat par l'α-benzoïneoxime en milieu tartrique ammoniacal.

Pour une séparation un peu moins rapide, le cuivre était précipité et pesé sous forme de sulfocyanure cuivreux après séparation du sélénium et de l'arsenic par l'hypophosphite en milieu HCl 9 *n*.

5) *Krypton*. La recherche du krypton était faite directement sur une feuille de cuivre attaquée dans un ballon par NO_3H. Le krypton, entraîné par un courant d'azote, traversait une solution alcaline de

sulfite, un desséchant, puis était fixé sur du charbon actif contenu dans un petit récipient en verre refroidi dans l'air liquide.

6) *Azote.* On a seulement recherché l'azote présent sous forme de NO_3^-, NO_2^-, NH_4^+ par la méthode suivante: attaque du cuivre par SO_4H_2 en présence de H_2O_2, l'entraîneur étant ajouté sous forme de nitrate, réduction par l'alliage de Dewarda en NH_3 que l'on recueillait dans une solution d'acide chloroplatinique en milieu alcoolique froid et pesait à l'état de chloroplatinate d'ammonium.

3.3. MESURES PAR EMISSION β

1) *Séparation* β^+ β^-

Nous avons monté un séparateur de charges très rudimentaire, fonctionnant dans l'air, donnant toutefois de bons résultats. Un petit aimant permanent à pièces polaires tronconiques permet d'obtenir un champ maximum d'environ 3000 gauss avec gradient dans un entrefer de 3 cm, permettant une focalisation approximative à 180°. Deux compteurs G.M. identiques, à paroi mince (2 ± 0.1 mg/cm² mica), situés de part et d'autre de l'entrefer, enregistrent les électrons déviés à 180° (fig. 2). La séparation en charge s'effectue ainsi à 1 % près environ. L'efficacité d'un tel ensemble est élevée: le tiers de celle obtenue en présentant la source sous le compteur, à 6 mm environ de la paroi (pour des $E_\beta \leqq 2$ MeV).

Nous avons pu ainsi constater, sans chimie, que la quasi totalité des activités induites dans le cuivre, aussi bien par l'azote que par l'oxygène, est constituée d'émetteurs β^+. Les seuls émetteurs β^-, identifiés après chimie, sont le cuivre 64, qui est à la fois émetteur β^+ et β^- et le cuivre 66, émetteur β^-. Parmi tous les autres éléments bien identifiés, aucun ne s'est révélé émetteur β^-.

2) *Compteurs* β

Nous avons sélectionné une dizaine de compteurs G.M. ayant pratiquement la même paroi (2 ± 0.1 mg/cm² mica) et la même efficacité. Ces compteurs ont été étalonnés à l'aide d'émetteurs β d'énergie connue, leurs temps morts ont été mesurés. Les corrections d'absorption, de temps mort et de géométrie ont été faites suivant les méthodes habituelles.

Etant donné le nombre relativement grand des éléments formés, un dispositif automatique d'enregistrement des comptages a été

utilisé, ce qui nous a permis de suivre les activités jour et nuit sans interruption pendant plusieurs jours.

3) *Identification des Éléments*

L'enregistrement des comptages G.M. permet le tracé de la courbe d'évolution des isotopes séparés chimiquement. Dans certains cas on

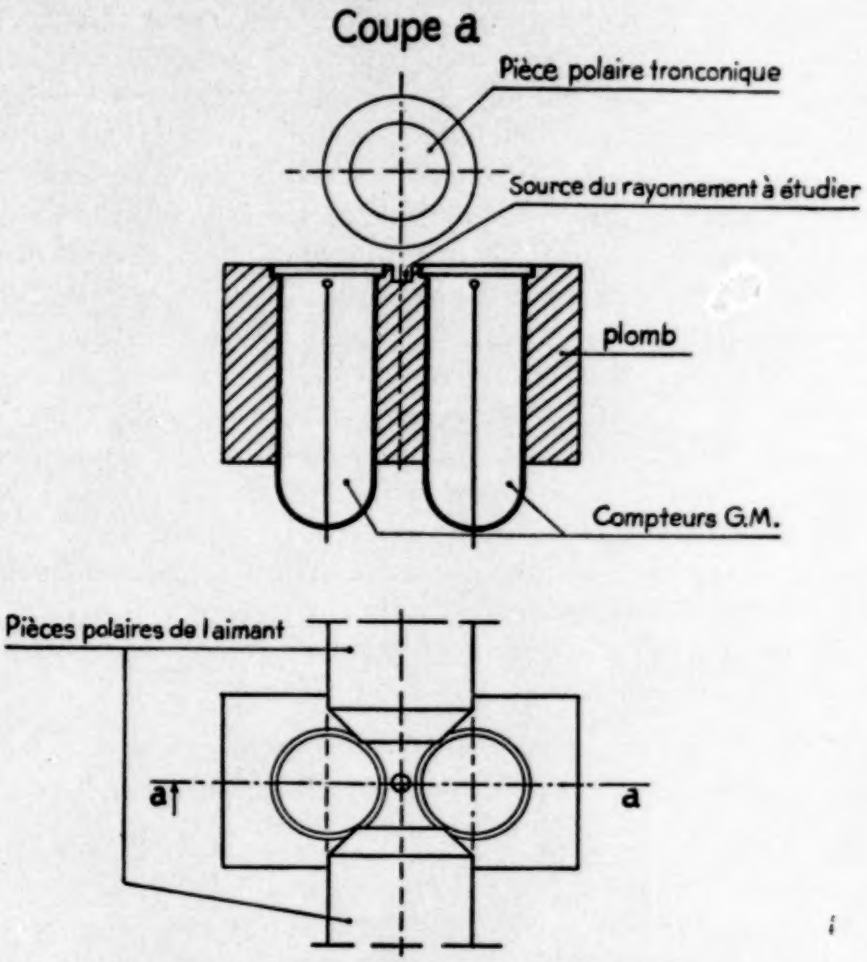

Fig. 2. Croquis du séparateur $\beta^+ \beta^-$.

observait la présence de corps en filiation. C'est le cas, en particulier, du sélénium et de l'arsenic.

On procédait alors à des extractions périodiques de la substance fille, de manière à identifier la filiation avec certitude.

Ces renseignements, joints au spectre du rayonnement γ émis, établi comme nous le verrons plus loin, suffisaient généralement à fixer le nombre de masse de l'isotope observé sans qu'il soit néces-

saire de faire des mesures d'absorption des rayonnements β émis.

4) *Mesure des Rendements Relatifs*

Pour chaque élément chimique, plusieurs périodes (de 1 à 3) étaient généralement présentes. La décomposition des courbes de décroissance était faite suivant les méthodes classiques. On calculait alors le nombre de noyaux formés par unité de temps pour chaque isotope, en tenant compte de la durée de l'irradiation et en corrigeant, dans la mesure du possible, des irrégularités de l'intensité du faisceau pendant l'expérience, intensités enregistrées systématiquement. Faute de connaître avec précision le nombre d'ions incidents ayant effectivement une énergie suffisante pour participer aux réactions et, par suite, l'épaisseur utile de la cible de cuivre, il n'était pas possible de tirer du nombre de noyaux formés une valeur de la section efficace partielle relative à la formation de chaque isotope. Nous avons donc utilisé comme élément de référence le brome 75 de période 95 min et nous avons mesuré, pour chaque isotope, le rendement relatif à celui du brome 75 qui était systématiquement mesuré dans toutes les irradiations. En effet, le brome 75 est un des éléments les plus abondants formé dans ces transmutations; sa période le rend aisé à comparer aussi bien aux éléments les plus courts qu'aux éléments les plus longs que nous soyons en mesure de détecter; enfin, il émet un rayonnement γ caractéristique, ce qui permet de lui rapporter aussi bien les éléments mesurés par leurs émissions β que ceux détectés uniquement par émission γ.

3.4. MESURES PAR SPECTROMETRIE γ

1) *Appareillage*

Les échantillons étaient placés entre un compteur G.-M. identique aux précédents et un système détecteur γ, cristal d'iodure de sodium activé au thallium ($d = 38$ mm, $l = 25.4$ mm) suivi d'un photomultiplicateur. Un écran d'aluminium de 3.8 mm d'épaisseur, destiné à arrêter les électrons de désintégration β, était placé au contact entre l'échantillon et le cristal. L'ensemble (P.M., G.-M.) placé dans un château de plomb, permettait de connaître simultanément les décroissances de β et γ émis et n'était cependant pas utilisé en coincidence.

Le photomultiplicateur (type Du Mont 6292) était alimenté par une haute tension stabilisée et suivi d'un amplificateur type C.E.A. de bande passante 2 mégacycles. Le réglage était fait de manière à

obtenir à la sortie 1 volt/10 keV à gain mille. Les impulsions mises en forme par double dérivation à $3 \cdot 10^{-6}$ et 10^{-6} s et intégration simple à 10^{-6} s étaient analysées à l'aide de deux sélecteurs à 10 canaux (fabriqués au C.E.A.), utilisés simultanément. La largeur des canaux était de 2.5 volt. Les courbes ont été normalisées pour une largeur de canal de 10 keV. La géométrie utilisée donnait le maximum d'efficacité à la détection et minimisait l'effet des rayonnements diffusés (en particulier, le château de plomb était doublé intérieurement de Cd et de Zn).

La variation de l'efficacité de détection γ en fonction de l'énergie a été déterminée en utilisant des étalons donnant des raies de rapport d'intensités connu. L'ordre de grandeur de l'efficacité absolue a été déterminé:

a) en utilisant les γ de sources dont l'activité β était mesurée au compteur 4π sans paroi,

b) en mesurant l'intensité du rayonnement d'addition de 2γ en cascade relativement à l'un d'eux.

2) *Identification des Éléments*

Après séparation chimique, on obtient un mélange d'isotopes d'un même élément ainsi que des éléments en filiation. Des mesures successives permettent de suivre la décroissance ou la croissance des raies photoélectriques.

La mesure des énergies de ces raies, de leur intensité relative et de leur période de décroissance, le groupement des raies de même période, permettent l'attribution d'un nombre de masse correct à chaque isotope présent, par comparaison avec les données de la littérature. L'observation des raies correspondant aux éléments de filiation apporte, dans certains cas, une confirmation supplémentaire.

Une fois les spectres γ établis pour chaque élément séparé chimiquement, il devenait possible de déceler la présence de chacun des isotopes dans le spectre γ total émis par les cibles de cuivre non traitées chimiquement et de suivre l'évolution des raies au cours du temps sur la cible elle-même. Par ailleurs, la propreté des isotopes obtenus après traitement chimique rapide, pouvait être testée par la présence ou non de raies γ de contamination.

A titre d'exemple, les figures 3, 4 et 5 reproduisent les spectres obtenus pour les éléments Br, Se, As séparés chimiquement. Les courbes de la fig. 6 montrent l'évolution en fonction du temps d'une cible de cuivre non traitée chimiquement, avec l'attribution des

pics caractéristiques de chaque élément. Les courbes de la fig. 7 montrent la décroissance de quelques raies en fonction du temps, avec la mise en évidence des périodes correspondantes.

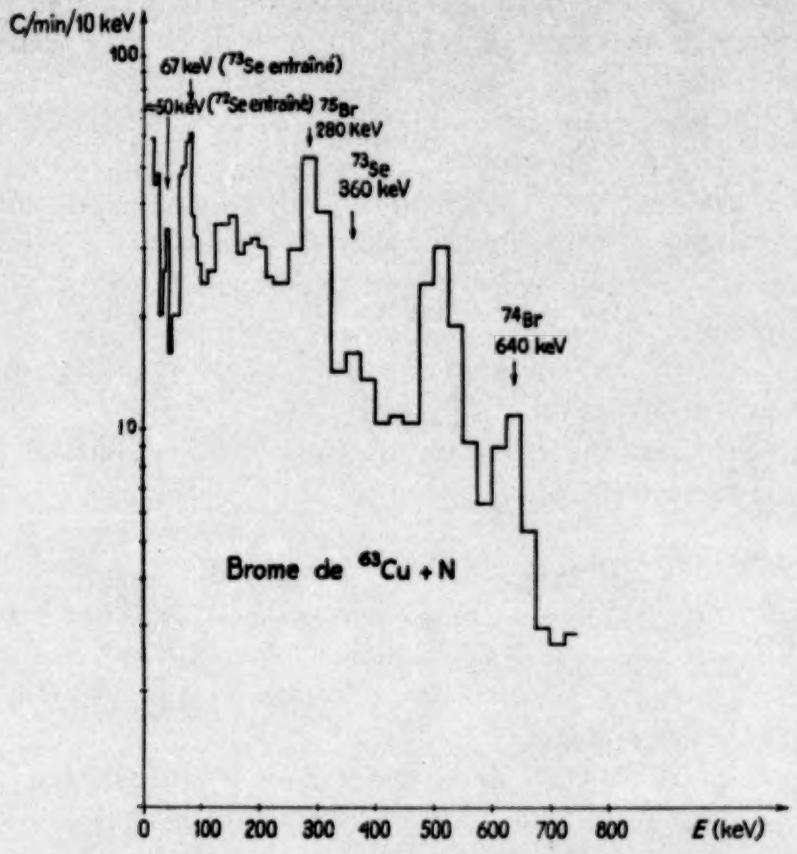

Fig. 3. Spectre γ du brome séparé chimiquement dans la réaction ^{63}Cu+N.

3) *Mesure des Rendements Relatifs*

La surface de chaque raie photoélectrique est obtenue, par soustraction dans le spectre complet du fond continu correspondant à l'énergie considérée. L'évaluation de ce fond, faite par interpolation des fonds voisins de la raie, est d'autant plus difficile que le spectre obtenu est plus complexe. Toutefois, chaque raie évolue au cours du temps avec sa période propre; le fond continu évolue d'une manière différente, ce qui permet à la raie étudiée d'émerger de ce fond.

On peut alors, à partir de ce moment, étudier la décroissance de la surface de ce pic. On obtient l'intensité en corrigeant la surface de l'efficacité de détection pour l'énergie considérée. L'erreur la plus probable sur ces mesures est inférieure à 20 %. On peut, de façon analogue à celle des mesures β, remonter aux nombres de noyaux

formés dans la transmutation. On obtient ainsi un tableau des rendements relatifs des éléments observés, rapportés au brome 75. En mesurant simultanément dans le cas de ^{75}Br, l'activité β^+ et le

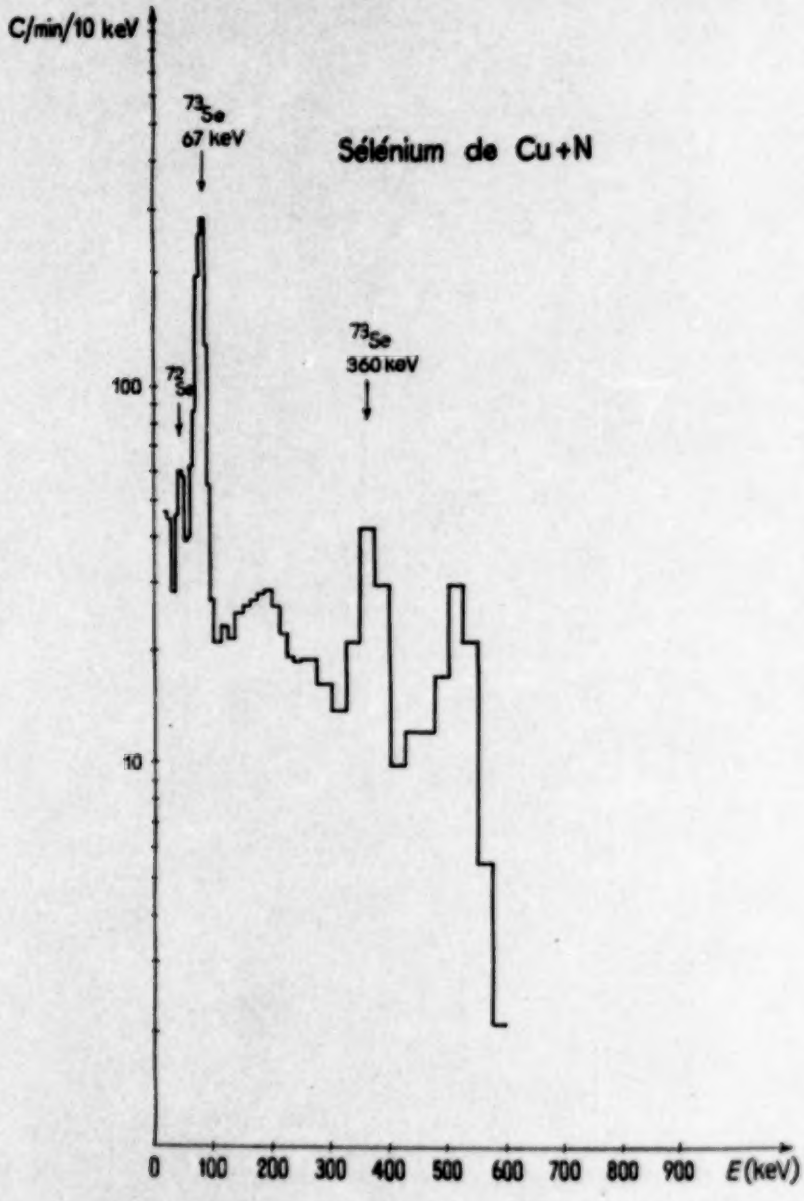

Fig. 4. Spectre γ du sélénium séparé chimiquement dans la réaction Cu+N.

rayonnement γ de 285 keV, il est possible de comparer les rendements obtenus par mesure des γ émis à ceux obtenus par mesure des radioactivités β. On obtient ainsi un tableau général des rendements relatifs des différents isotopes observés.

Pour certains d'entre eux (^{74}Br, ^{75}Br, ^{73}Se, ^{71}As, ^{72}As) qui dé-

croissent à la fois par émission β^+ et par émission γ, on obtient ainsi deux mesures indépendantes des rendements relatifs, et la détermination en est rendue plus précise. Pour d'autres tels que ^{76}Br,

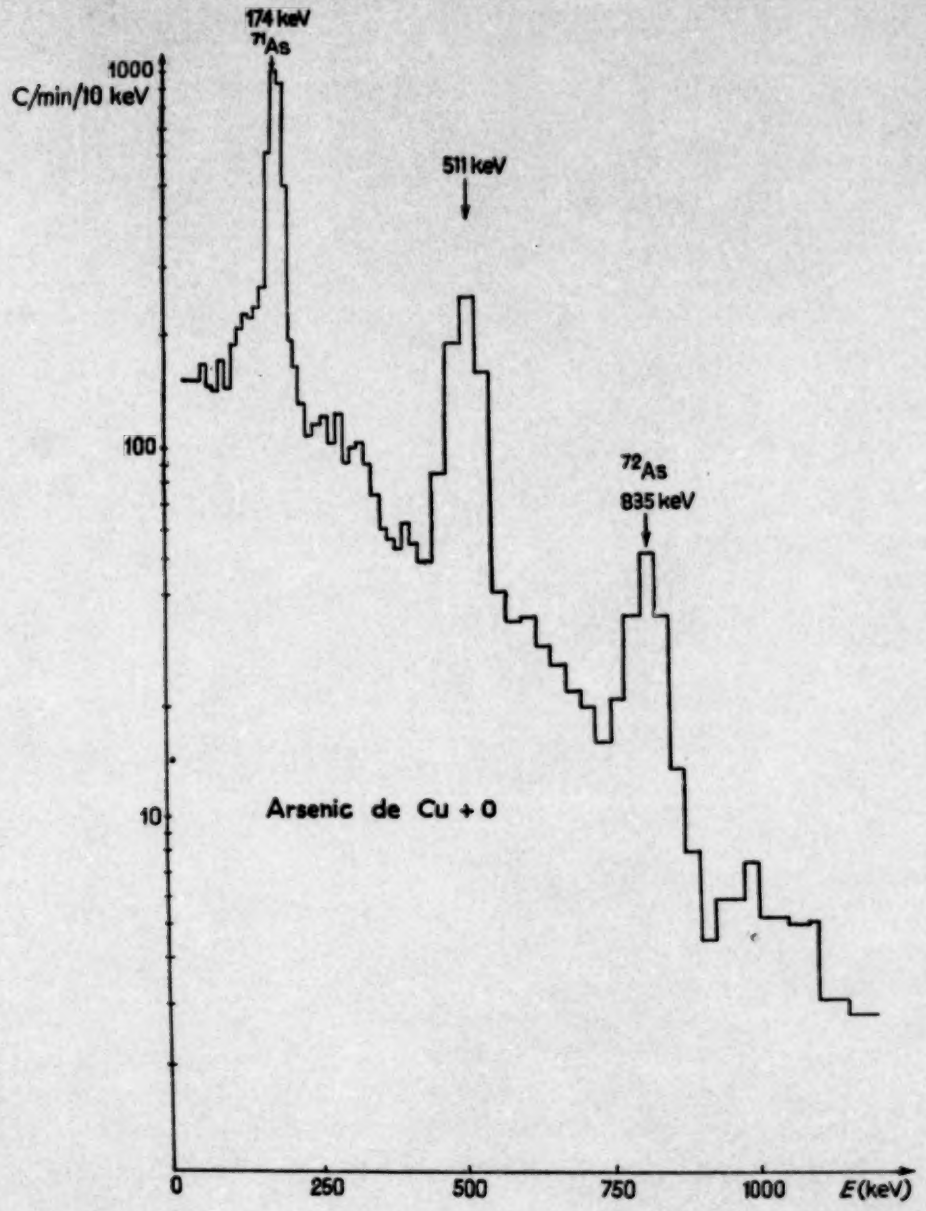

Fig. 5. Spectre γ de l'arsenic séparé chimiquement dans la réaction Cu+O.

^{70}Se, ^{70}As, ^{62,64,66}Cu, ^{13}N, seule la mesure β s'est montrée possible. Le ^{72}Se est mesuré en β grâce au rayonnement émis par ^{72}As en équilibre. Pour d'autres encore (^{75}Se, ^{77}Br, ^{67}Ga etc.) décroissant par capture électronique suivie de γ, seule l'observation des γ permet la mesure des rendements relatifs. C'est aussi le cas du krypton, ob-

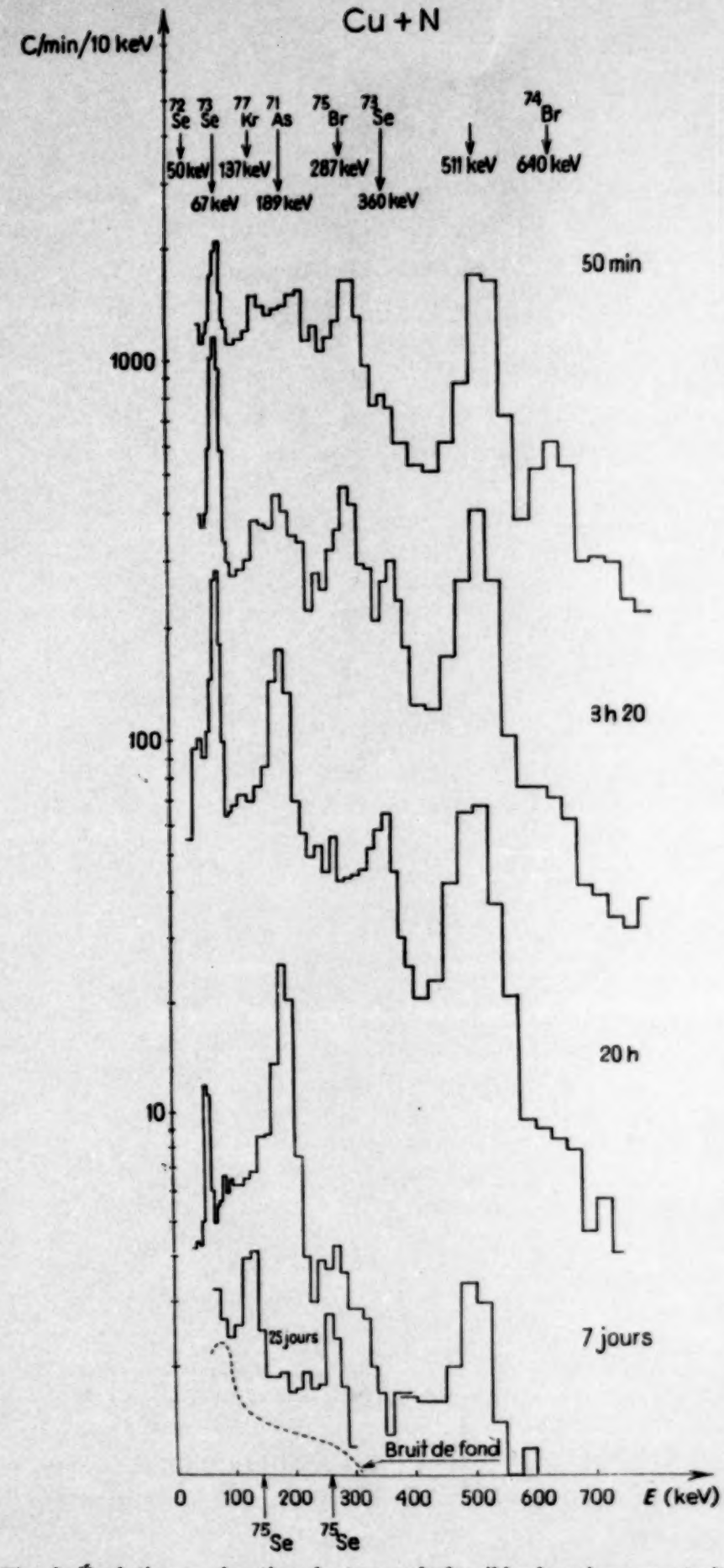

Fig. 6. Évolution en fonction du temps de la cible de cuivre non traitée.

tenu sous forme gazeuse dans une ampoule de verre et pour lequel les mesures en β n'étaient pas possibles.

4. Résultats et Discussions

4.1. CARACTÈRES PRINCIPAUX DES ÉLÉMENTS IDENTIFIÉS

L'ordre de grandeur très approché des sections efficaces totales est d'environ 10^{-25} cm^2. Les sections efficaces partielles peuvent être évaluées pour chacun des isotopes les plus abondants entre 10^{-26} et 10^{-27} cm^2. Le tableau 1 donne, pour chaque isotope, les éléments d'information qui, outre les propriétés chimiques, ont permis de lui attribuer un nombre de masse déterminé. Nous ajouterons pour chacun d'eux les caractères particuliers qui nous ont conduit à ces conclusions.

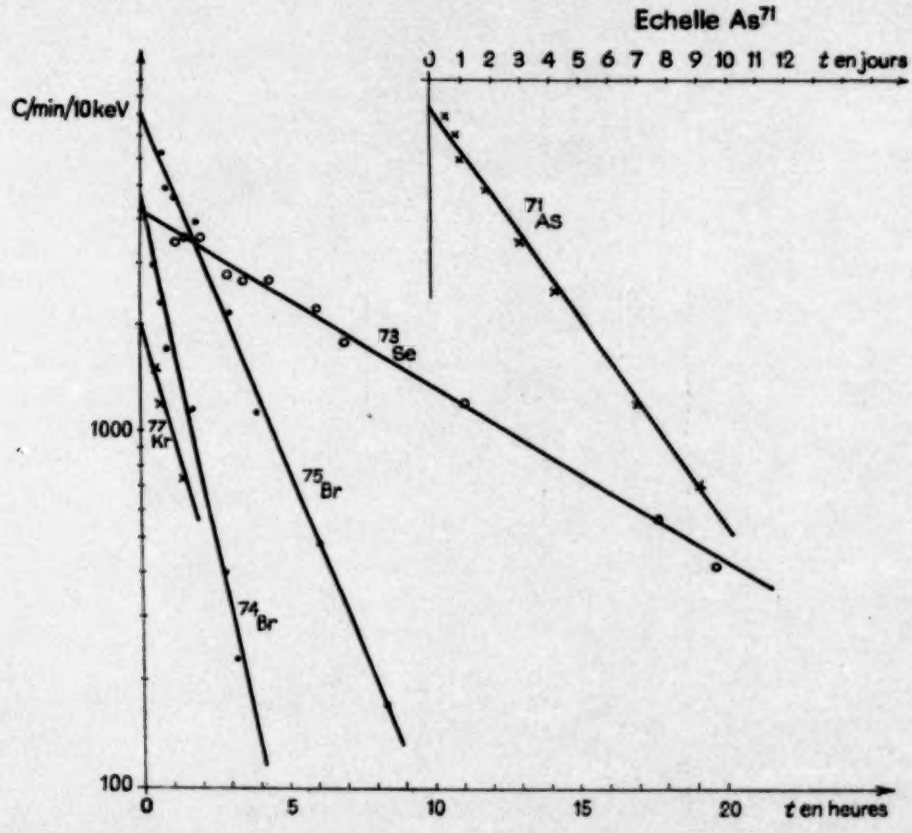

Fig. 7. Décroissance de quelques raies en fonction du temps.

Rubidium: Nous avons pu mettre en évidence la formation d'un nouvel isotope léger du rubidium de nombre de masse 79 [9]), de période 24 ± 1 min, émetteur β^+, présentant un spectre γ complexe, la raie la plus visible ayant une énergie de 150 ± 10 keV; une autre

TABLEAU 1

Identification des Eléments

Nature chimique	Période	Emission β	Energies γ observées après séparations chimiques (keV)	Filiations
Rubidium 79	24 min	β^+	150	
Krypton 77	1.2 h	K	137	Br 77
Brome 77	57 h	K	235	
76	16 h	β^+		
75	95 min	β^+	285	Se 75
74	35 min	β^+	640	
Sélénium 75	127 j	K	144, 270, 405	
73	7 h	β^+	67, 360	
72	9.7 j		50	As 72
70	44 min	β^+		As 70
Arsenic 72	26 h	β^+	835	
71	60 h	β^+	174	
70	52 min	β^+		
Gallium 67	78 h	K	92, 180, 300, 390	
Cuivre 62	10 min	β^+		
64	12 h	$\beta^+\beta^-$		
66	6 min	β^-		

Les énergies soulignées correspondent aux valeurs utilisées pour caractériser les éléments.

raie d'énergie 675 ± 20 keV pouvant être due à l'addition du rayonnement vers 150 keV avec le rayonnement d'annihilation des β^+.

Krypton: Les kryptons sont recueillis par adsorption dans le graphite et mesurés par leurs rayonnements γ, à travers la paroi d'une ampoule de verre. La présence de ^{77}Kr s'est manifestée par une raie γ complexe de 137 ± 7 keV décroissant avec une période de 69 ± 6 min [10]). Cette raie est clairement visible dans les feuilles de cuivre non traitées chimiquement, ce qui permet d'évaluer son rendement relatif indépendamment des erreurs liées à l'extraction chimique et à la géométrie de détection à travers l'ampoule de verre.

Brome: Etant donné le rôle d'élément de référence attribué au brome dans ces expériences, il s'agit de l'élément le plus fréquemment extrait et le plus longuement étudié.

La formation de ^{74}Br et ^{75}Br de périodes respectives 35 min et

95 min a été mise évidence par Hollander dans la réaction cuivre-carbone [7]). Ces éléments ont par ailleurs été peu étudiés. La décroissance β des bromes extraits des cibles de cuivre dans nos expériences témoignait de la présence de trois périodes 35 min, 95 min et 16 h. La période de 16 h est attribuable à ^{76}Br.

En spectrométrie γ, une raie de 640 ± 10 keV et décroissant avec 42 ± 5 min peut être attribuée à ^{74}Br; une autre raie de 285 ± 5 keV, période 95 ± 5 min, caractérise le ^{75}Br. L'énergie de cette raie est en accord avec la différence des énergies des β^+ de ^{75}Br 0,3 et 0.6 MeV observés par Fultz [11,12]). Par ailleurs, la présence de ^{75}Se, élément de filiation de ^{75}Br, est observée dans les échantillons de Br (raies complexes à 144 ± 8 keV et 276 ± 10 keV [13]) sans qu'il y ait eu entraînement de sélénium dans la séparation chimique (pas d'autres séléniums présents).

^{77}Br (EC, 1 % β) n'a pu être vu par détection β. Il présente un spectre complexe dont un γ nettement prédominant dans le spectre détecté et d'énergie 235 keV.

Sélénium: La présence d'arsenic, produit de filiation des séléniums formés, oblige à des extractions multiples pour identifier les périodes de sélénium présentes.

La filiation 44 min $\rightarrow$ 52 min attribuée dans les tables aux isobares de masse 70, ^{70}Se $\rightarrow$ ^{70}As, manifeste la présence de ^{70}Se bien que la période observée par nous pour le sélénium soit plus voisine de 35 min. La période de 52 min de l'arsenic extrait apparaît très clairement.

Une période de 7 h, jointe aux γ caractéristiques observés, permet d'identifier ^{73}Se. On observe une raie de 360 ± 10 keV de période 7.1 ± 0.3 h ainsi qu'une raie de 67 keV de même période et d'intensité sensiblement égale, conformément aux résultats publiés [14]). Pour le calcul des rendements, la raie de 67 keV a été utilisée avec un coefficient de conversion $\alpha_K \approx 0.3$.

La filiation des masses 72, ^{72}Se (9.7 j) et ^{72}As (26 h), est clairement présente. Une raie de 50 keV ayant une période de l'ordre de 10 jours doit sans doute être attribuée à ^{72}Se car elle n'est pas présente dans le spectre de ^{72}As. Dans la source Se, on a observé du ^{75}Se qui peut être d'origine ou produit par filiation à partir du ^{75}Br pendant la durée même de l'irradiation. Ce sélénium décroît par capture K, émettant des rayonnements γ complexes dont le groupe le plus intense a une énergie moyenne de 137 keV.

Arsenic: L'arsenic formé a deux origines distinctes: celui pro-

venant de la décroissance du sélénium et celui formé directement dans l'irradiation. On peut observer ^{70}As de période 52 min, ^{71}As de période 60 h et ^{72}As de période 26 h. Pour l'arsenic 71, on observe une raie photoélectrique γ de 189 ± 12 keV décroissant avec une période de 60 ± 3 h. Pour le calcul des rendements, le schéma et les coefficients de conversion déterminés par Thulin, Moreau et Atterling ont été utilisés [15]). ^{72}As de période 26 h, ayant un γ de 835 keV se forme en quantité faible pour Cu+N, plus importante pour Cu+O. L'arsenic 70 est formé en partie directement, en partie par filiation. Les deux éléments ^{70}Se et ^{70}As ont des périodes voisines, du même ordre de grandeur que les durées d'irradiation et relativement courtes devant la durée nécessaire des opérations chimiques. Il en résulte des imprécisions notables sur les rendements de ces éléments.

Cuivre: On observe une période de 5 min correspondant à des β^-, attribuable au cuivre 66, une période de 10 min correspondant à des β^+ qui témoigne de la présence du cuivre 62 et enfin une période de 12.8 h correspondant à des β^+ et des β^-, permettant d'identifier le cuivre 64.

Azote: On observe une décroissance β avec une période pure, très nette, de 10 min, caractérisant l'azote 13.

4.2. RENDEMENTS RELATIFS DES ÉLÉMENTS IDENTIFIÉS

Le tableau 2 donne les rendements relatifs des divers isotopes, rapportés à ^{75}Br = 100. Pour le cuivre naturel, les chiffres indiqués sont des moyennes de plusieurs irradiations. Pour les isotopes séparés, on a procédé à une seule irradiation dans chaque cas.

Les erreurs maxima sur les chiffres indiqués sont de l'ordre de 50 % et peuvent être supérieures pour les valeurs entre crochets. Ces erreurs sont dues essentiellement aux irrégularités d'irradiations, ainsi que dans une certaine mesure aux erreurs de rendement chimique ou de mesures expérimentales d'intensité de rayonnement.

Lorsque le schéma complet de désintégration de l'isotope considéré n'est pas connu, le rendement observé représente une limite inférieure du rendement réel. Pour les mesures β, nous avons admis que le rapport K/β^+ était de l'ordre de 2 pour les éléments suivants: ^{79}Kr, ^{70}Se, ^{70}As, ^{74}Br. Cette estimation est valable tout au moins comme ordre de grandeur, d'après les données existantes de la systématique. Les valeurs correspondantes sont signalées dans le tableau 2 par un astérisque. D'ailleurs, la dispersion des valeurs expérimentales des rapports K/β^+ mesurées effectivement introduit

TABLEAU 2

Rendements relatifs des divers isotopes rapportés à $^{75}Br = 100$

Elément	Masse	Période	Cuivre + $^{14}_{7}N$					Cuivre + $^{16}_{8}O$				
			Cu nat.	^{63}Cu		^{65}Cu		Cu nat.	^{63}Cu		^{65}Cu	
			rend. rel.	Q (U.M.N. $\times 10^{-3}$)	rend. rel.	Q (U.M.N. $\times 10^{-3}$)	rend. rel.	rend. rel.	Q (U.M.N. $\times 10^{-3}$)	rend. rel.	Q (U.M.N. $\times 10^{-3}$)	rend. rel.
$_{37}Rb$	79	24 min						15†		$\leqq \varepsilon$		100†
$_{36}Kr$	77	1.1 h	$\geqq 3$			—12	$\geqq 12$	$\geqq 40$	—17	$\geqq 65$	—27	$\geqq 30$
$_{36}Kr + _{35}Br$	77							$\geqq 60$		$\geqq 65$		$\geqq 80$
$_{35}Br$	76	16 h	35	— 0.3	$\leqq 3$	—11	100	40	—25	60	—14	10
	75	95 min	100	—10	100	—18	100	100	— 4	100	—23	100
	74	35 min	60†		120†							
$_{34}Se$	73	7 h	30	+ 2.1	25	—17	30	25	—22	35	—33	5
	72	9.7 j	6	— 5.7		—25		$\geqq 5$	—20	$\geqq 5$	—40	> 0.5
	70	44 min	[6†]	—26		—44		[1.5†]	—40		—50	[1†]
$_{33}As$	72	26 h		— 5		—15		10	—20	10	—19	25
	71	60 h	75	—15	85	—24		5	—18	5	—27	5
	70	52 min	[15†]	—15		—34		[5†]	—18		—37	
$_{31}Ga$	67	78 h	4	—18		—28		7	—13	7	—31	10
$_{29}Cu$	66	5 min	[3]									
	64	12.8 h	[10]					[2]				
	61	3.3 h	[3]									
$_{7}N$	13	10 min	[3]									

[ ] = nombres pour lesquels les erreurs sont susceptibles d'être supérieures à 50 %

† = valeurs obtenues en prenant le rapport $K/\beta^+ = 2$.

des incertitudes comparables. Dans les publications précédentes, cette correction n'avait pas été appliquée: c'est pourquoi les valeurs des rendements relatifs indiqués ici pour les radioéléments énumérés se trouvent trois fois plus élevées que celles indiquées précédemment [16,17]).

Outre les radioéléments indiqués, un certain nombre d'autres ont été recherchés pour la réaction Cu+N et non observés. En particulier, il n'a pas été trouvé d'activité significative dans les éléments suivants, tous de masse inférieure au cuivre:

a) Zn, Ni, Fe, Cr, Mg mesurés 2 h après la fin de l'irradiation,

b) Co, Cr, Sc, Al mesurés 1 h après la fin de l'irradiation,

c) Mn mesuré $\frac{1}{2}$ h après la fin de l'irradiation.

Dans les réactions

^{63}Cu+N on n'a pas observé de ^{77}Kr,

^{65}Cu+N on n'a pas observé de ^{74}Br ni de ^{71}As,

Cu+O on n'a pas observé de ^{74}Br et les fractions Zn et Ge ne représentaient pas d'activité significative,

^{63}Cu+O on n'a pas observé de ^{74}Br,

^{65}Cu+O on n'a pas observé de ^{74}Br ni de ^{70}As.

Ceci revient à dire que l'activité des échantillons obtenus avec ces éléments était négligeable devant celle des isotopes les plus importants et indiscernables d'entraînements chimiques éventuels.

4.3. REMARQUES

1) Compte tenu de toutes les erreurs expérimentales possibles, les résultats provenant de moyennes d'un grand nombre d'irradiations ont plus de valeur que ceux fournis par une ou quelques irradiations seulement. Ceci explique les quelques modifications des résultats publiés pour la transmutation du cuivre par l'oxygène. Cependant, la différence observée dans les résultats publiés il y a un an [16]) concernant le ^{74}Br et les résultats actuels dépasse nettement nos erreurs. Nous pensons que cette différence peut être attribuée à une évolution dans la distribution en énergie des ions oxygène, le cyclotron ayant été utilisé il y a un an dans sa période de mise au point. La nature chimique du gaz alimentant la source d'ions a été changée. Il est possible que le faisceau actuel soit plus riche en ions de grande énergie que celui de l'an dernier. Nous pensons vérifier ce point ultérieurement.

2) En collaboration avec le Dr Fremlin, nous avons pu, à Birmingham, reproduire la réaction cuivre + azote. Les rendements

obtenus sont, dans l'ensemble, assez voisins de ceux obtenus à Saclay [18]).

Avec la collaboration du Dr Atterling, nous avons répété la réaction Cu+O dans le cyclotron de 225 cm de l'Institut Nobel de Physique à Stockholm [19]); nous avons été obligés de prendre une cible plus épaisse. Dans l'ensemble, les résultats ne diffèrent pas de façon significative (mêmes éléments observés et mêmes rendements relatifs voisins) mais toutefois certains éléments représentent une variation supérieure aux incertitudes expérimentales; ces différences peuvent être dues à la différence d'épaisseur des cibles et à une différence d'énergie moyenne entre les faisceaux des deux machines. Les rendements obtenus sont, dans l'ensemble, assez voisins de ceux obtenus à Saclay.

3) A Saclay toutes les irradiations indiquées ont été faites à 65 cm du centre du cyclotron pour l'azote et à 55 cm pour l'oxygène. Lorsque l'énergie moyenne des ions diminue (irradiations à 35 et 45 cm), il ne semble pas y avoir une diminution significative des rendements relatifs des différents éléments. On constate seulement une diminution générale de l'activité c'est-à-dire que la section efficace totale est sensible à l'énergie mais que les proportions relatives des sections efficaces partielles sont peu modifiées. Ceci est dû à l'épaisseur des cibles utilisées et à la distribution continue en énergie des ions incidents.

4.4. DISCUSSION

Les diagrammes de la fig. 8 schématisent les résultats du tableau 2. On a porté en abscisse les nombres de masse et en ordonnée les éléments chimiques dans l'ordre des numéros atomiques croissants.

On trouvera l'abondance relative à $^{75}Br = 100$ dans chaque carré. Le ou les noyaux cibles sont figurés par des carrés noirs et les noyaux correspondant à l'addition complète des deux noyaux, par des carrés hachurés.

On peut voir que les éléments les plus abondants sont situés au voisinage du noyau de fusion. On observe également, mais en quantité nettement moins importante, des éléments au voisinage du cuivre.

Pour la transmutation cuivre + azote, on observe la formation de cuivres et d'azote radioactifs; il y a là très vraisemblablement un échange partiel de nucléons entre les deux noyaux: ce mécanisme semble toutefois peu important.

L'ensemble de ces résultats témoigne fortement en faveur d'un

mécanisme d'addition des deux noyaux, suivie de l'évaporation de quelques nucléons.

Dans l'hypothèse de formation d'un noyau composé, on peut re-

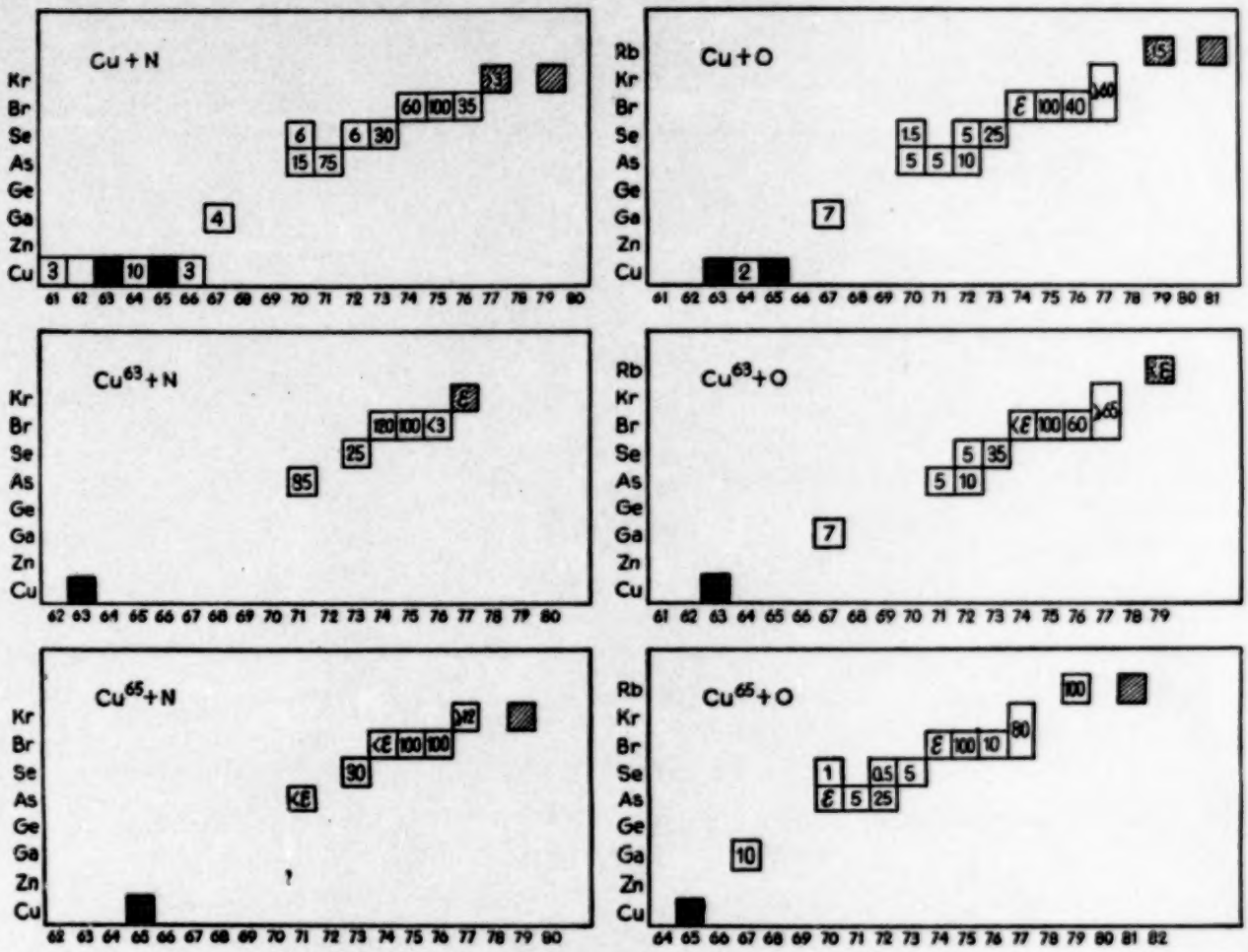

Fig. 8. Schéma des résultats du tableau 2. Carrés noirs: noyaux cibles; carrés hachurés: noyaux résultant de la fusion complète. Abondances relatives à celle de $^{75}Br = 100$. *Erratum:* Pour le rendement du brome 74, lire partout $< \varepsilon$ au lieu de ε. En ordonnée: éléments par numéro atomique croissant; en abscisse: nombre de masse.

présenter les résultats en fonction du nombre de nucléons émis. Ceci est représenté dans le diagramme de la fig. 9. Outre les diagrammes correspondant à ^{63}Cu et à ^{65}Cu nous donnons ceux correspondant au cuivre naturel pour lequel on compte les nucléons émis à partir du cuivre 63 + azote 14 (ou oxygène 16) car son abondance isotopique est de 70 %. Les résultats pour le cuivre naturel représentent les moyennes de nombreuses irradiations et portent sur plus d'éléments que ceux concernant les isotopes séparés. On voit que l'émission d'un

nucléon est très improbable et que celle de 2, 3, 4 est la plus fréquente. Après 4 à 6 nucléons, les rendements diminuent.

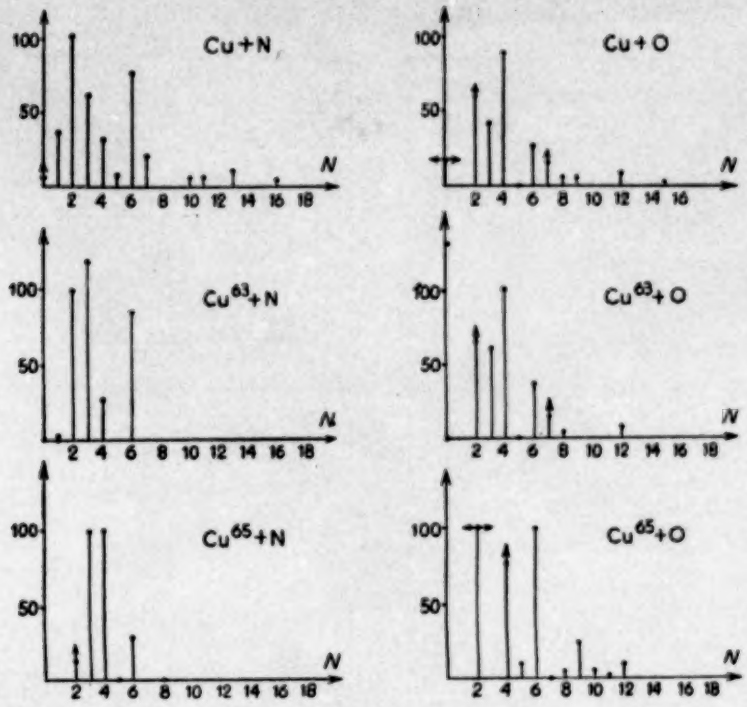

Fig. 9. Rendements relatifs des éléments formés en fonction du nombre total des nucléons émis. Pour cuivre naturel + azote ou oxygène, on a supposé négligeable la participation du cuivre 65 pour établir les diagrammes.

4.5. COMPARAISON AVEC LA THÉORIE

Nous avons essayé de comparer les rendements obtenus dans les réactions ^{63}Cu+N et ^{63}Cu+O avec ceux prédits par la théorie de l'évaporation du noyau composé, telle qu'elle est exposée dans le livre de Blatt et Weisskopf [20]). Cette comparaison est rendue difficile par le fait que la répartition énergétique des ions de nos faisceaux ainsi que les facteurs de pénétration sont mal connus. Dans le cas présent, nous avons fait des calculs [21]) pour des énergies d'excitation moyennes comprises entre 40 et 60 MeV.

On sait que le nombre ω des niveaux d'excitation des noyaux est donné par la formule générale

$$\omega = C \exp 2\sqrt{aE}$$

où E est l'énergie d'excitation et où C et a sont des paramètres donnés à la fois par la théorie et par les expériences. Si l'on utilise les valeurs du coefficient a prévues par la théorie, on constate que, pour les énergies incidentes correspondant à une pénétrabilité suffisante des noyaux non déformés, la désexcitation du noyau nécessite l'éva-

poration d'un nombre relativement grand de nucléons, et qu'il est difficile d'expliquer l'observation expérimentale des éléments correspondant à la perte de seulement deux nucléons.

Pour pouvoir rendre compte plus aisément de la prépondérance des éléments correspondant à l'évaporation de 2 ou 3 nucléons, il faudrait:

1) modifier dans la théorie statistique les formules relatives à la distribution des niveaux de manière à diminuer leur nombre et à favoriser les transitions de grande énergie. Dans nos expériences, ce sont les plus faibles valeurs de a (≈ 2) qui donneraient le moins de contradiction avec les résultats expérimentaux. Ceci revient alors à augmenter la température nucléaire et à diminuer la vie moyenne du noyau composé dans des proportions importantes. Il a déjà été constaté que les valeurs du coefficient a obtenues par différentes expériences ne sont pas toujours cohérentes [22]).

2) admettre une énergie d'excitation plus faible c'est-à-dire que l'ion projectile pourrait avoir une interaction importante avec les noyaux pour des énergies notablement inférieures à la barrière. Ceci pourrait se produire par déformation mutuelle des noyaux.

Le fait d'obtenir surtout des noyaux voisins de l'addition montre que la plupart des nucléons du projectile sont capturés dans les noyaux cibles. Ceci exclut un mécanisme d'interaction entre deux nucléons seulement comme il est envisagé pour expliquer les réactions de spallation.

On pourrait encore imaginer, ce dont la théorie statistique ne tient pas compte, que la désexcitation du noyau composé peut être obtenue par l'émission de rayon γ de très grande énergie ou encore que des nucléons individuels ou groupes de nucléons peuvent sortir directement du noyau avant le partage statistique de l'énergie disponible.

Quoi qu'il en soit, l'étude de la distribution en énergie des γ et des particules émises dans chaque transmutation présenterait un grand intérêt et la formation de noyaux composés par ions lourds peut apporter une contribution intéressante à l'étude des réactions nucléaires à moyenne énergie.

Nous remercions l'équipe qui a construit et fait marcher pour notre travail le cyclotron de Saclay en particulier MM. Bariaud, Roche et Thalman ainsi que Mmes Le Pape, Cros et Gratot qui nous ont apporté une aide précieuse dans la réalisation de ces expériences.

Nous devons également des remerciements au Dr Fremlin de

Birmingham et au Dr Atterling de Stockholm qui nous ont permis des expériences de contrôle de ces réactions à l'aide des cyclotrons de Birmingham et de Stockholm.

Références

1) A. Ghiorso, G. B. Rossi, B. G. Harvey et S. G. Thompson, Phys. Rev. **93** (1954) 257
2) H. Atterling, W. Forshing, L. W. Holm, L. Melander et B. Astrom, Phys. Rev. **95** (1954) 585
3) D. H. Walker, Progr. Nucl. Phys. **4** (1955) 215
4) H. L. Reynolds et A. Zucker, Phys. Rev. **102** (1956) 1378
5) K. F. Chackett, J. H. Fremlin et D. Walker, Phil. Mag. **45** (1954) 173
6) P. Debraine, Onde Electr. **35** no 344 (1955) 1048
A. Bariaud, Onde Electr. **35** no 344 (1955) 1063
A. Bariaud, Bull. Inf. CEA (à paraître)
7) J. M. Hollander, UCRL 1396 (1951)
8) G. W. Greenlees et A. E. Souch, Phil. Mag. **46** (1955) 682
9) R. Chaminade, M. Cros, I. Gratot et M. le Pape, Nuclear Physics **2** (1956/57) 634
10) S. Thulin, Arkiv. Fys. **9** (1955) 137
11) S. C. Fultz et M. L. Pool, Phys. Rev. **86** (1952) 347
12) S. C. Fultz et M. L. Pool, Phys. Rev. **86** (1952) 631A
13) A. W. Schardt et J. P. Welker, Phys. Rev. **99** (1955) 810
14) R. W. Hayward et D. D. Hoppes, Phys. Rev. **98** (1955) 1172A
15) S. Thulin, J. Moreau et H. Atterling, Arkiv. Fys. **8** (1954) 219
16) J. Beydon, R. Chaminade, M. Crut, H. Faraggi, J. Olkowsky et A. Papineau, J. Phys. Rad. **16** (1955) 890
17) H. Faraggi, J. Olkowsky, J. Beydon, M. Crut, R. Chaminade et A. Papineau, J. Phys. Rad. **17** (1956) 519
18) R. Chaminade et J. H. Fremlin (à paraître)
19) H. Atterling, J. Beydon, M. Crut et J. Olkowsky, Nuclear Physics **2** (1956/57) 619
20) Blatt et Weisskopf, Theoretical Nuclear Physics, p. 371
21) M. Crut et Jacob (à paraître)
22) G. Igo et H. E. Wegner, Phys. Rev. **102** (1956) 1364

Nuclear Physics **2** (1956/57) 619—623; *North-Holland Publishing Co., Amsterdam*

TRANSMUTATION DU CUIVRE PAR LE CARBONE, L'OXYGENE ET LE NEON

H. ATTERLING
Institut Nobel de Physique, Stockholm
et
J. BEYDON, M. CRUT † et J. OLKOWSKY
Centre d'Études Nucléaires de Saclay, Gif-sur-Yvette

Reçu le 28 septembre 1956

Abstract: Transmutations of Cu bombarded by C, O and Ne ions are studied. The results are summarized in the table and figures. Most reactions take place through fusion of the colliding nuclei.

Nous avons étudié, au grand cyclotron [1]) de l'Institut Nobel de Physique (Stockholm) la transmutation du cuivre naturel par des ions carbone 12, oxygène 16 et néon 20.

Les faisceaux de néon et d'oxygène étaient des faisceaux intérieurs d'ions six fois chargés, présentant une distribution continue d'énergie s'étendant (pour un rayon de 80 cm) jusqu'à 175 MeV dans le cas du néon et jusqu'à 140 MeV dans le cas de l'oxygène. Le faisceau intérieur d'ions carbone était constitué par des ions 4 fois chargés dont l'énergie varie jusqu'aux environs de 130 MeV (rayon de 90 cm).

Les cibles étaient constituées par des feuilles de cuivre de 50 μ d'épaisseur, dans lesquelles la plus grande partie des ions était complètement ralentie. Après les irradiations, les principaux radio-éléments formés étaient identifiés par extraction chimique et étude de leurs propriétés radio-actives: période, émission β, émission γ, filiations éventuelles. Les rendements relatifs étaient calculés à partir des activités mesurées. Les méthodes d'identification, de mesure d'activité et de calcul des rendements étaient les mêmes que celles déjà décrites par ailleurs [2]). Les résultats sont rassemblés dans le tableau 1; ils sont rapportés à $^{75}Br = 100$ dans le cas de l'oxygène et du néon, et à $^{73}Se = 100$ dans le cas du carbone. Dans le cas de l'oxygène, les expériences ont été faites à différents rayons moyens dans le cyclotron, de manière à faire varier l'énergie maximum des ions. Les rendements relatifs, en cible épaisse, ne semblent pas beau-

† Actuellement détachée de l'Institut du Radium.

coup modifiés lorsque l'énergie limite du spectre varie. Seul, le rendement relatif de ^{67}Ga semble augmenter notablement lorsque l'énergie maximum des ions augmente.

On peut voir sur la fig. 1 une représentation graphique des résultats inscrits dans le tableau 1. Verticalement, on trouve la nature chimique de l'élément observé dans l'ordre des numéros atomiques

TABLEAU 1

Eléments	Masse	Période	Cu + ^{12}C ↓ $^{75-77}_{35}Br$	Cu + ^{20}Ne ↓ $^{83-85}_{39}Y$	Cu + ^{16}O ↓ $^{79-81}_{37}Rb$ rayon à 80 cm	Comparaison Cu + ^{16}O ↓ $^{79-81}_{37}Rb$ rayon à 70 cm
$_{38}Sr$	82	27 j		90*		
$_{37}Rb$	81	4.7 h		100		
	79	24 min		90*		
$_{36}Kr$	77					
$_{36}Kr + _{35}Br$	77			≧120	≧ 80	≧ 80
$_{35}Br$	76	16 h	$< \varepsilon$	35	20	30
	75	95 min	25	**100**	**100**	**100**
	74	35 min	15*	20*	$< \varepsilon$	$< \varepsilon$
$_{34}Se$	73	7 h	**100**	10	35	40
	72	9.7 j	160	15	20	15
	70	44 min	[5*]	2*		
$_{33}As$	72	26 h	140	15	25	20
	71	60 h	200	15	20	10
	70	52 min	[20*]	6*		
$_{32}Ge$	69	39.6 h	115		5	5
	67	21 min	5*			
	66	150 min	4*			
$_{31}Ga$	68	68 min	30			
	67	78 h	60	20	20	6
	66	9.4 h	20			
$_{29}Cu$	66					
	64	12.8 h	8	10	2	
	61	3.3 h	2			

Les astérisques indiquent que le coefficient K/β^+ a été supposé égal à 2.
Les crochets encadrent des valeurs pouvant être entachées d'erreurs relatives supérieures à 50 %.
Les activités cherchées et non observées sont figurées par $< \varepsilon$.

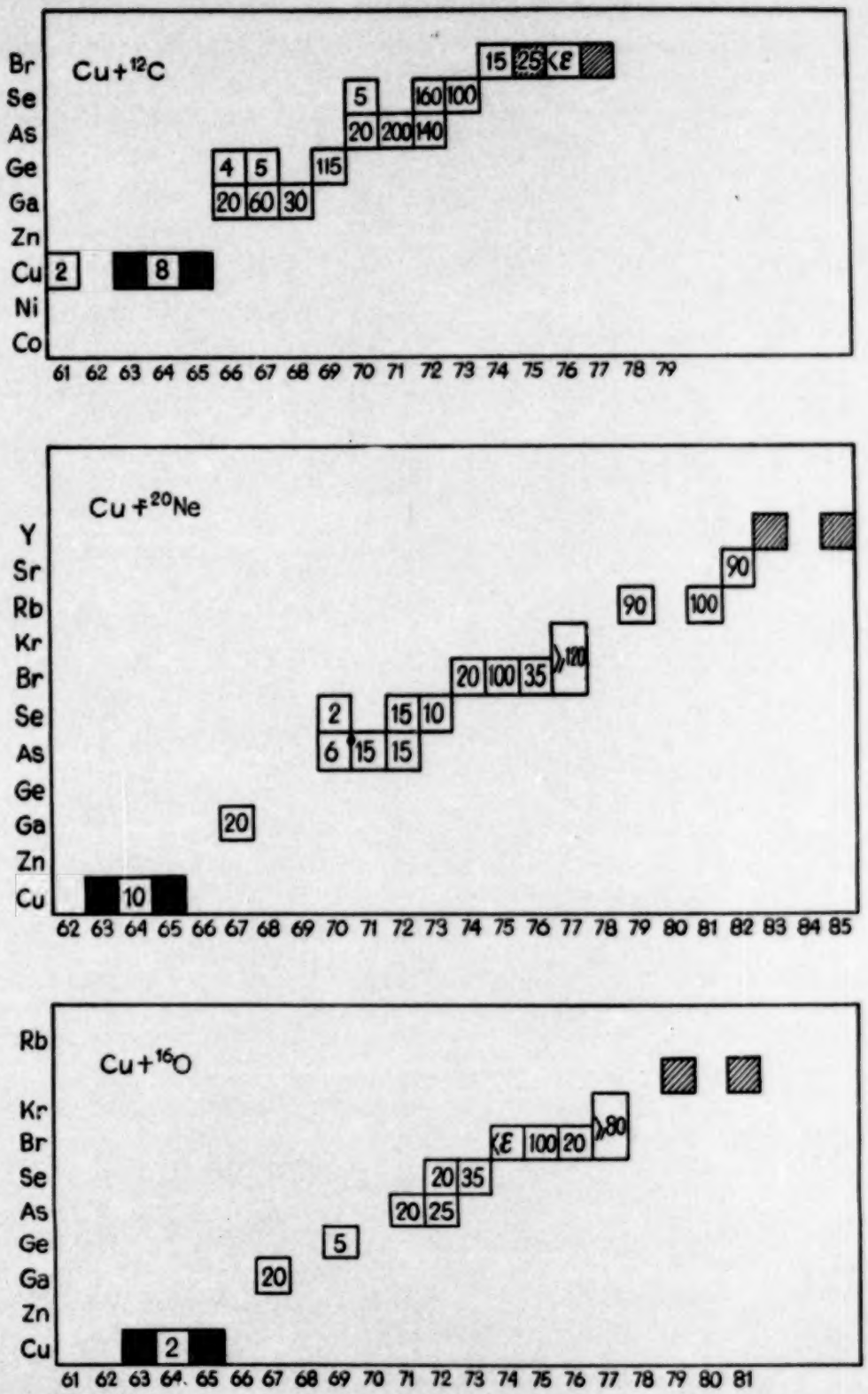

Fig. 1. Représentation des résultats.
Les activités cherchées et non observées sont figurées par $<\varepsilon$.

croissants; horizontalement, on trouve le nombre de masse. Les carrés noirs figurent les isotopes de cuivre, les carrés hachurés les

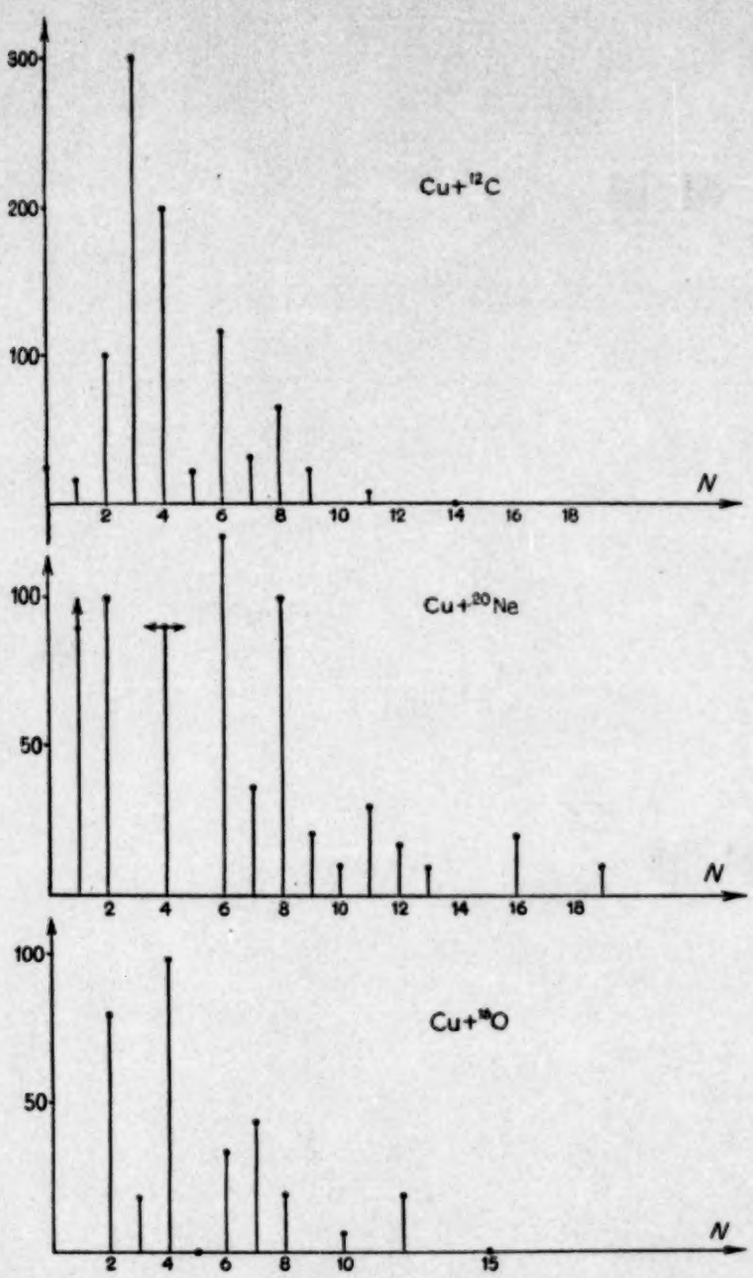

Fig. 2. Rendements relatifs, en fonction du nombre N de nucléons émis, ramenés à ^{63}Cu.

noyaux d'addition correspondants. Les rendements sont représentés par les nombres situés dans les carrés. Dans la réaction Cu+^{20}Ne,

nous avons cherché particulièrement la fraction yttrium pour laquelle nous n'avons observé que des activités négligeables.

On peut constater que la plupart des nucléides observés correspondent à l'addition complète du noyau cible et du projectile, diminuée de quelques nucléons, en accord avec les résultats déjà obtenus à Saclay dans la transmutation du cuivre par l'azote et l'oxygène [2]). Le mécanisme le plus fréquent dans ces transmutations semble donc être la formation d'un noyau composé somme de tous les nucléons en présence, suivie de l'évaporation de quelques uns d'entre eux.

Dans la fig. 2 ont été représentées les proportions relatives des principaux nucléides formés en fonction du nombre de nucléons émis, rapportées à ^{63}Cu. On peut voir que les nucléides les plus abondants sont ceux qui correspondent à l'émission d'un petit nombre de nucléons. Dans le cas du néon, l'évaporation d'un nombre important de nucléons est relativement plus fréquente, ce qui peut s'expliquer par la plus grande énergie apportée par les ions néon au noyau composé.

Nous remercions l'équipe du cyclotron de Stockholm qui nous a facilité les irradiations ainsi que Mmes Cros, Gratot et Le Pape pour leur participation à ce travail.

Nous sommes très reconnaissants au Professeur Siegbahn pour la généreuse hospitalité offerte à trois d'entre nous à l'Institut Nobel de Physique.

Références

1) H. Atterling et G. Lindström, Nature **169** (1952) 432
H. Atterling, Arkiv för Fysik, **7** (1954) 503
H. Atterling, Arkiv för Fysik, **11** (1956) 103 (abstract)
2) J. Beydon, R. Chaminade, M. Crut, H. Faraggi, J. Olkowsky et A. Papineau, Nuclear Physics **2** (1956/57) 593

Nuclear Physics **2** (1956/57) 624—633; *North-Holland Publishing Co., Amsterdam*

COMPARAISON DES REACTIONS $^{59}Co+^{20}Ne$ et $^{63}Cu+^{16}O$

M. CRUT †, H. FARAGGI et J. OLKOWSKY

Centre d'Études Nucléaires de Saclay, Gif-sur-Yvette

et

H. ATTERLING

Institut Nobel de Physique, Stockholm

Reçu le 28 septembre 1956

Abstract: The comparison of there actions $Co+^{20}Ne$ and $^{63}Cu+^{16}O$ shows that they take place mainly through the formation of the same compound nucleus ^{79}Rb. The production of ^{67}Ga, however, is different in the two cases and must therefore be due in part to some other process.

1. Introduction

Nos expériences sur les transmutations du cuivre par les ions lourds [1]) s'interprètent assez bien en supposant la formation d'un noyau intermédiaire correspondant à la fusion complète des deux noyaux. Pour confirmer cette hypothèse, nous avons voulu tenter de former le même "noyau composé" par deux réactions différentes: si le modèle du noyau composé est valable et si l'énergie d'excitation est la même dans les deux réactions, on devrait observer la formation des mêmes nucléides avec des rendements comparables.

Nous avons fait porter cette comparaison sur les réactions $Co+^{20}Ne$ et $^{63}Cu+^{16}O$. Dans les deux cas, le noyau composé serait le rubidium 79. D'après les masses, les teneurs en énergie des différentes voies possibles pour les transmutations sont les mêmes, à 2 MeV près. Les barrières de potentiel sont respectivement de 39 MeV et de 34 MeV.

Les transmutations se font sur des cibles épaisses à l'aide de faisceaux intérieurs d'ions six fois chargés présentant une distribution continue d'énergie. Pour des raisons de commodité expérimentale, la transmutation du cobalt par le néon a été faite à l'aide du faisceau de néon 20 six fois chargé fourni par le grand cyclotron de l'Institut Nobel de Physique à Stockholm. La cible de cuivre 63, moins épaisse et de moindre résistance mécanique, a été exposée au faisceau d'oxygène 16 six fois chargé fourni par le cyclotron de Saclay.

† Actuellement détachée de l'Institut du Radium.

Pour tenir compte des différences possibles pouvant provenir soit de la différence d'épaisseur des cibles, soit de la distribution différente des énergies dans les faisceaux incidents, nous avons effectué à Saclay et à Stockholm la transmutation du cuivre naturel par l'oxygène. Nous avons ensuite comparé les rendements relatifs des réactions $^{63}Cu+^{16}O$ et $Cu+^{16}O$ effectuées à Saclay à ceux des réactions $Co+^{20}Ne$ et $Cu+^{16}O$ effectuées à Stockholm; si le modèle du noyau composé est valable, la réaction $Co+^{20}Ne$ doit être à la réaction $Cu+^{16}O$ ce qu'est la réaction $^{63}Cu+^{16}O$ à la même réaction, toutes choses égales par ailleurs.

2. Transmutations Provoquées par le Faisceau d'Oxygène Six Fois Chargé du Cyclotron de Saclay

La cible de cuivre 63 avait une masse superficielle de 6 mg/cm^2. Après l'irradiation, une partie de la cible était traitée chimiquement et les éléments Br, Se, As, Ga et Cu en étaient extraits. Les nucléides formés étaient identifiés par leur nature chimique, par leur période de désintégration β et par l'énergie et la période des rayonnements γ émis. Sur l'autre partie, non traitée chimiquement, les rayonnements γ émis par les nucléides créés dans la cible étaient mesurés par spectrométrie γ et leur évolution suivie au cours du temps. On pouvait ainsi connaître l'énergie et la période des principaux rayonnements γ présents. Ces caractéristiques étaient suffisantes pour permettre l'identification des principaux nucléides formés, les séparations chimiques précédentes permettant de s'en assurer. Les méthodes de mesure et les diverses corrections nécessaires pour remonter des mesures au nombre de noyaux formés dans les transmutations étaient les mêmes que celles déjà décrites par ailleurs [1]).

Les rendements relatifs des principaux nucléides formés sont donnés dans le tableau 1, colonne 1, ainsi que dans la fig. 1a. Ils sont rapportés à ^{75}Br pris arbitrairement égal à 100.

L'irradiation du cuivre naturel par l'oxygène a été faite dans les mêmes conditions et par les mêmes méthodes, avec une cible de même épaisseur. Les résultats sont donnés dans le tableau 1, colonne 2, et dans la figure 1c.

3. Transmutations Provoquées par les Faisceaux d'Oxygène et de Néon Six Fois Chargés du Cyclotron de Stockholm

La cible de cobalt, spectroscopiquement pure, avait une épaisseur de 1/10 mm (87 mg/cm^2). Les méthodes suivies étaient les mêmes

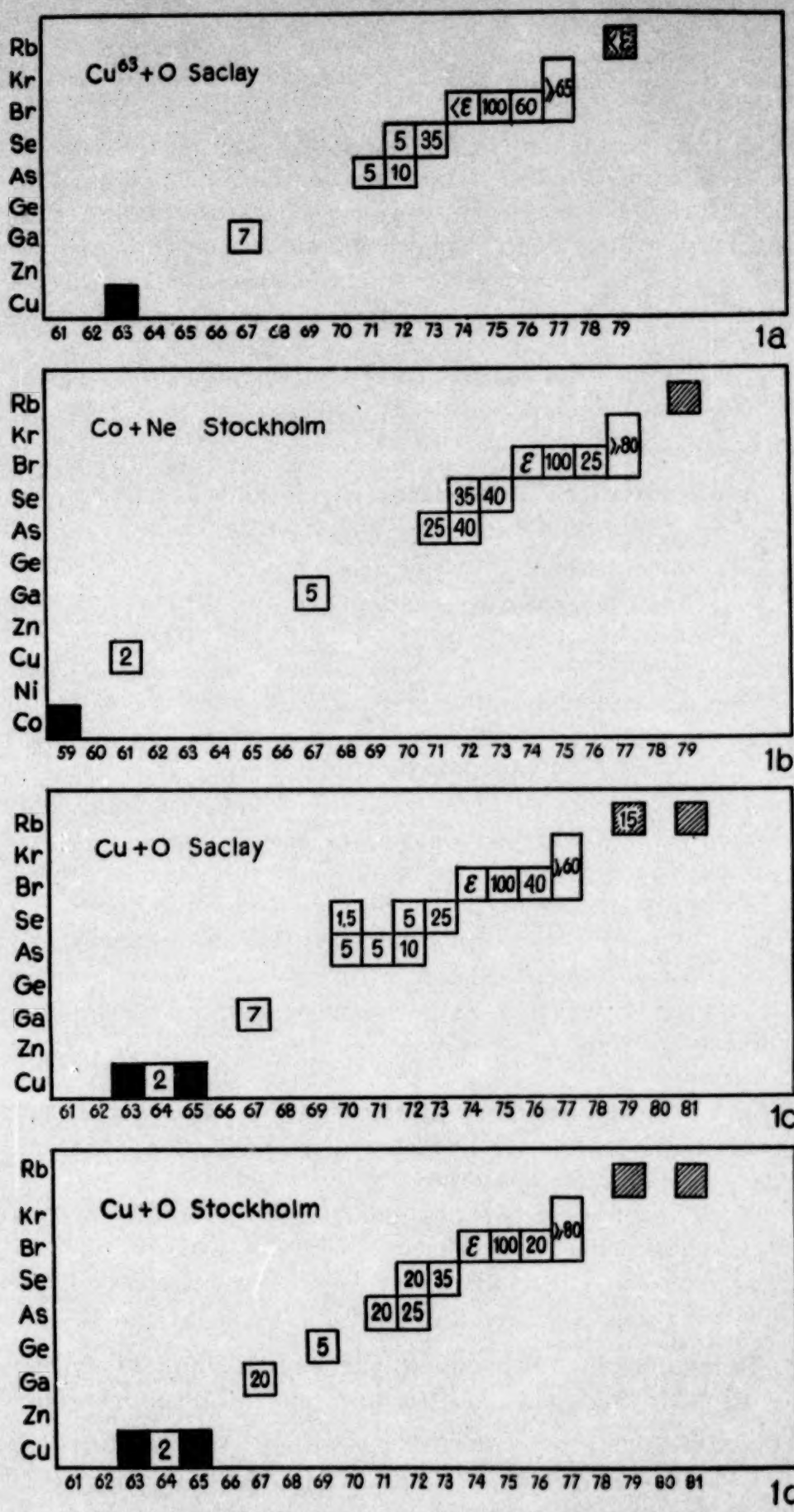

Fig. 1. Rendements relatifs pour les réactions ^{63}Cu+O, Co+Ne. En ordonnée: éléments chimiques par numéro atomique croissant; en abscisse: nombre de masse. *Erratum:* Pour le rendement du brome 74, lire partout $< \varepsilon$ au lieu de ε.

TABLEAU 1

Eléments observés dans les réactions $^{63}Cu+^{16}O$, Co+Ne et Cu+^{16}O

Eléments	Masse	Période	SACLAY		STOCKHOLM	
			1 $^{63}Cu+^{16}O$ ↓ $^{79}_{37}Rb$	2 Cu+^{16}O ↓ $^{79-81}_{37}Rb$	3 Co+^{20}Ne ↓ $^{79}_{37}Rb$	4 Cu+^{16}O ↓ $^{79-81}_{37}Rb$
$_{37}Rb$	81	4.7 h				
	79	24 min	$< \varepsilon$	15*		
$_{36}Kr$	77		≧65	≧40		
$_{36}Kr+_{35}Br$	77		≧65	≧60	≧80	≧80
$_{35}Br$	76	16 h	60	40	25	20
	75	95 min	100	100	100	100
	74	35 min	$< \varepsilon$	$< \varepsilon$	$< \varepsilon$	$< \varepsilon$
$_{34}Se$	73	7 h	35	25	40	35
	72	9.7 j	≧ 5	≧ 5	35	20
	70	44 min		[1.5*]		
$_{33}As$	72	26 h	10	10	40	25
	71	60 h	5	5	25	20
	70	52 min		[5*]		
$_{32}Ge$	69	39.6 h				5
	67	21 min				
	66	150 min				
$_{31}Ga$	68	68 min				
	67	78 h	7	7	5	20
	66	9.4 h				
$_{29}Cu$	66					
	64	12.8 h		[2]		[2]
	61	3.3 h			2	

Les * indiquent que l'on a supposé un rapport $K/\beta^+ = 2$.
Les [ ] indiquent que l'incertitude peut dépasser 50 %.
$< \varepsilon$ indique une activité trop faible pour être significative.

que pour le expériences de Saclay. Les résultats figurent dans le tableau 1, colonne 3, ainsi que dans la figure 1b.

Les résultats relatifs à la transmutation du cuivre par l'oxygène, effectuée à Stockholm dans les mêmes conditions expérimentales que pour le cobalt, figurent dans le même tableau, colonne 4 et dans la figure 1d.

On peut constater que les rendements relatifs de la transmutation

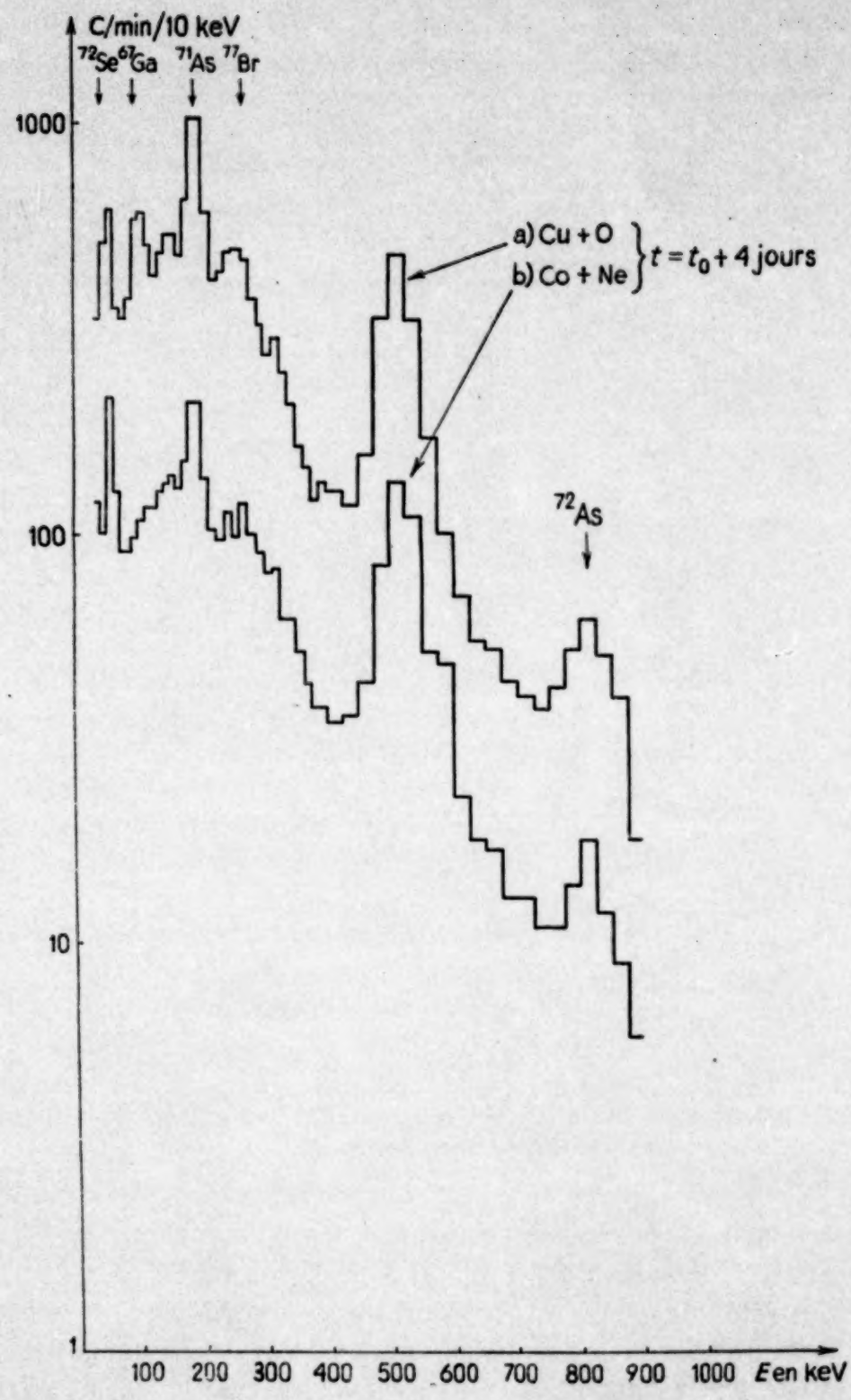

Fig. 2. Spectres γ obtenus 4 jours après la fin de l'irradiation. a) Cible de cuivre. b) Cible de cobalt.

du cuivre par l'oxygène étudiés à Saclay ou à Stockholm ne sont pas tout à fait identiques. Les erreurs expérimentales, bien que relativement importantes dans ce genre d'expériences, ne suffisent cependant pas à expliquer cette différence. Il semble plus légitime de l'attribuer soit à la différence d'épaisseur des cibles, soit à des différences dans l'énergie moyenne des ions incidents due à une différence dans la forme du spectre.

Par ailleurs dans ces expériences, l'énergie maximum du faisceau de néon (155 MeV pour le rayon de 75 cm utilisé) n'est pas très différente, à la précision des expériences près, de celle du faisceau d'oxygène dans le cyclotron de Stockholm (140 MeV). Il est par suite possible de dire que les énergies d'excitation apportées dans les réactions $Cu+^{16}O$ et $Co+^{20}Ne$ réalisées à Stockholm sont du même ordre de grandeur et qu'il en est de même pour les réactions $^{63}Cu+^{16}O$ et $Cu+^{16}O$ réalisées à Saclay, alors qu'il n'en est pas de même pour les réactions $Cu+^{16}O$ réalisées à Saclay ou à Stockholm.

4. Comparaison des Rendements Relatifs

Compte tenu de toutes les causes d'imprécisions auxquelles nous avions affaire, il semblait légitime de comparer les deux réactions en cause, à condition de passer par l'intermédiaire des réactions $Cu+^{16}O$ telles qu'elles étaient observées dans les deux machines.

a) On peut tout d'abord constater, qualitativement, que les *principaux nucléides obtenus sont les mêmes* dans les quatre réactions étudiées. Le cuivre 63 étant présent à 70 % dans le cuivre naturel, il y a assez peu de différences entre les rendements obtenus pour le cuivre 63 séparé et pour le cuivre naturel.

De même, il y a peu de différence entre les rendements observés pour le cuivre naturel et pour le cobalt; cependant le rendement relatif du ^{67}Ga est nettement plus faible dans la réaction $Co+^{20}Ne$ que dans la réaction $Cu+^{16}O$, alors qu'il est le même pour les réactions $^{63}Cu+^{16}O$ et $Cu+^{16}O$.

Pour illustrer ceci, les fig. 2 et 3 montrent les spectres γ obtenus dans les réactions $Co+^{20}Ne$ et $Cu+^{16}O$ à Stockholm, pour une même durée d'irradiation, et mesurés après des temps égaux pris à partir de la fin de l'irradiation. Pour la figure 2, ce temps est de 4 jours; pour la fig. 3, de 7 jours après l'irradiation. La similitude des spectres est assez frappante. Les pics photoélectriques de 50 keV (^{72}Se), 174 keV (^{71}As), 237 keV (^{77}Br) et 835 keV (^{72}As) se retrouvent dans les deux spectres avec des intensités comparables. Par

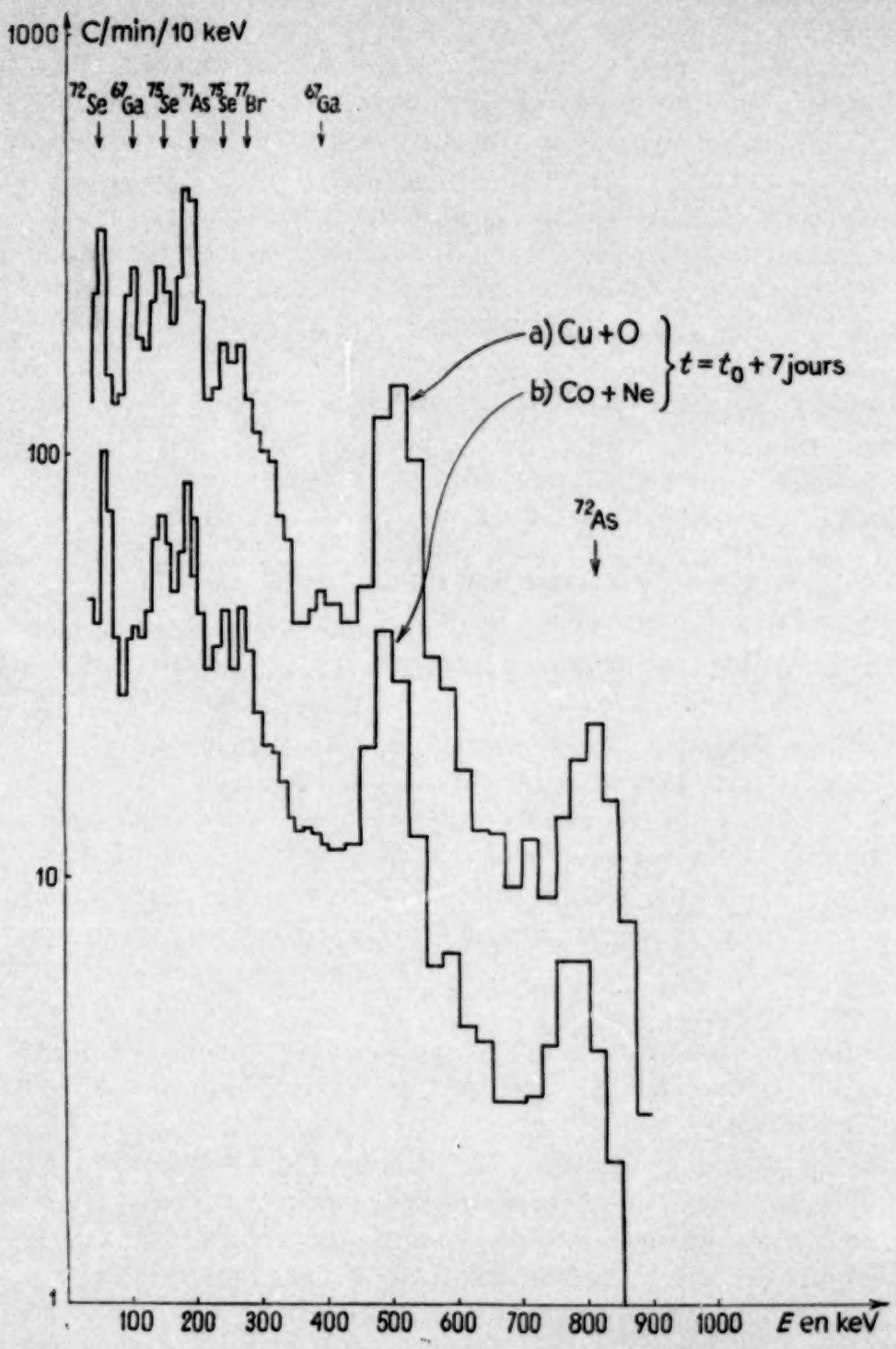

Fig. 3. Spectres γ obtenus 7 jours après la fin de l'irradiation. a) Cible de cuivre. b) Cible de cobalt.

contre, le pic à 92 keV correspondant à ^{67}Ga est beaucoup plus abondant dans les spectres du cuivre que dans ceux du cobalt.

b) Afin de rendre cette comparaison plus quantitative, nous avons comparé les rendements relatifs pour chacun des nucléides mis en évidence.

Pour cela, nous avons formé séparément pour chaque nucléide les rapports des rendements obtenus pour les réactions $^{63}Cu+^{16}O$ et $Cu+^{16}O$ à Saclay et ceux obtenus pour les réactions $Co+^{20}Ne$ et $Cu+^{16}O$ à Stockholm. Nous avons ensuite fait le rapport de ces rapports. Les résultats sont rassemblés dans le tableau 2.

TABLEAU 2

Rapports des rendements relatifs

Elément	$\left(\frac{^{63}Cu+O}{Cu+O}\right)_{Saclay} / \left(\frac{Co+Ne}{Cu+O}\right)_{Stockh.}$			$\left(\frac{^{65}Cu+O}{Cu+O}\right)_{Saclay} / \left(\frac{Co+Ne}{Cu+O}\right)_{Stockh.}$		
$^{77}Br+^{77}Kr$	$\frac{65}{60} : \frac{80}{80}$	=	1,08	$\frac{80}{60} : \frac{80}{80}$	=	1.3
^{76}Br	$\frac{60}{40} : \frac{25}{20}$	=	1.2	$\frac{10}{40} : \frac{25}{20}$	=	0.2
^{73}Se	$\frac{35}{25} : \frac{40}{35}$	=	1.2	$\frac{5}{25} : \frac{40}{35}$	=	0.17
^{72}Se	$\frac{5}{5} : \frac{35}{20}$	=	0.6	$\frac{0.5}{5} : \frac{35}{20}$	=	0.06
^{73}As	$\frac{10}{10} : \frac{40}{25}$	=	0.6	$\frac{25}{10} : \frac{40}{25}$	=	1.5
^{71}As	$\frac{5}{5} : \frac{25}{20}$	=	0.8	$\frac{5}{5} : \frac{25}{20}$	=	0.8
^{67}Ga	$\frac{7}{7} : \frac{5}{20}$	=	4	$\approx \frac{10}{7} : \frac{5}{20}$	=	≈ 6

Pour un noyau composé, au sens strict, les rapports finaux devraient être égaux à 1. On peut constater qu'à l'exception du gallium 67, ils sont tous compatibles avec la valeur 1 ± 0.5, ce qui est dans la limite de la précision des mesures.

Toutefois, afin de nous assurer que cet accord n'était pas dû entièrement au hasard, nous avons formé les mêmes rapports pour une autre réaction, telle que $^{65}Cu+^{16}O$ que nous avions étudiée par ailleurs [1]). Nous avons alors pu constater que les valeurs obtenues peuvent s'écarter notablement de la valeur 1 ± 0.5 et qu'il est par suite légitime de considérer le résultat obtenu pour $^{63}Cu+^{16}O$ et $Co+^{20}Ne$ comme significatif.

Sur la fig. 4 sont représentées les valeurs ainsi obtenues pour les rapports

$$\frac{^{63}Cu+^{16}O}{Co+^{20}Ne} \text{ et } \frac{^{65}Cu+^{16}O}{Co+^{20}Ne}$$

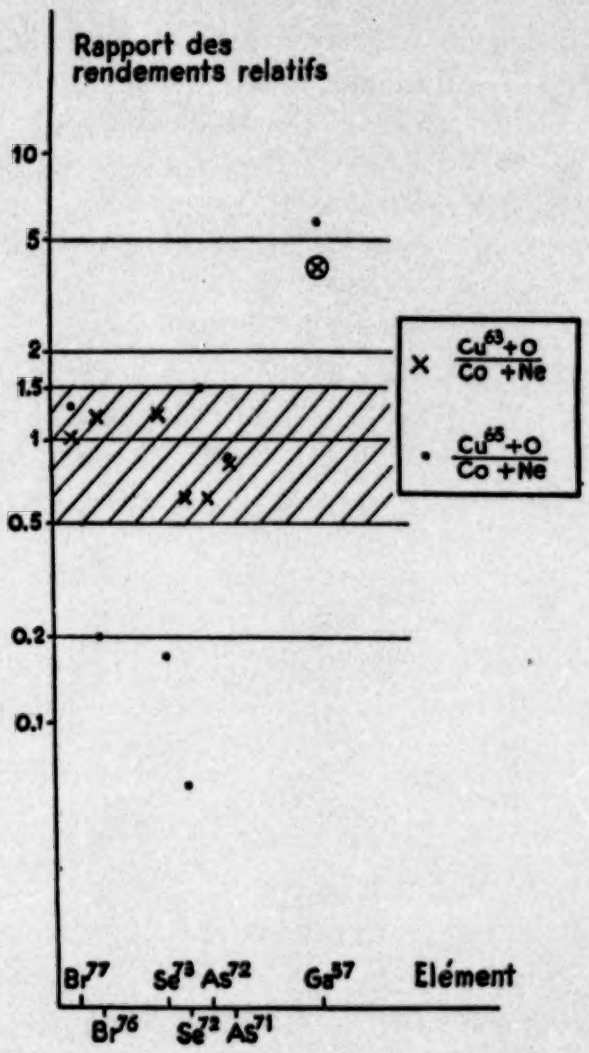

Fig. 4. Graphique montrant les rapports des rendements relatifs.

5. Discussion

En conclusion, il nous paraît légitime de dire que, dans les transmutations du cuivre par l'oxygène et du cobalt par le néon, il y a formation d'un noyau intermédiaire identique et que les nucléides observés, à l'exception du gallium 67, résultent de la désexcitation de ce noyau intermédiaire, suivant le modèle classique du noyau composé.

Par contre, la formation du gallium 67, relativement plus abondante dans le cas du cuivre que dans celui du cobalt, doit être attribuée à un mécanisme d'échange dû à la capture partielle de quelques nucléons du noyau d'oxygène par le noyau de cuivre. On retrouverait ici le mécanisme du „buckshot" proposé par le groupe de Birmingham [3]). Dans le cas du cobalt, on observe d'ailleurs la formation du cuivre 61 qui joue un rôle équivalent à celui du gallium dans le cas du cuivre. Toutefois, dans les deux réactions, la formation du noyau composé reste de beaucoup le phénomène prépondérant.

Nous remercions les équipes de conduite des cyclotrons de l'Institut Nobel de Physique, à Stockholm, et du Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, qui ont permis de faire les différentes irradiations ainsi que Mlle Beydon et Mmes Le Pape, Gratot et Cros pour leur participation aux expériences.

En outre, nous tenons à exprimer notre reconaissance au Professeur Siegbahn pour la généreuse hospitalité accordée à à deux d'entre nous.

Références

1) J. Beydon, R. Chaminade, M. Crut, H. Faraggi, J. Olkowsky et A. Papineau. Nuclear Physics **2** (1956/57) 593

2) H. Atterling, J. Beydon, M. Crut et J. Olkowsky, Nuclear Physics **2** (1956/57) 619

3) K. F. Chackett, J. H. Fremlin, D. Walker, Phil. Mag. **45** (1954) 173

Nuclear Physics **2** (1956/57) 634—639; *North-Holland Publishing Co., Amsterdam*

MISE EN EVIDENCE D'UN ISOTOPE LEGER DE RUBIDIUM

R. CHAMINADE, M. CROS, I. GRATOT et M. LE PAPE

Centre d'Études Nucléaires de Saclay, Gif-sur-Yvette

Reçu le 28 septembre 1956

Abstract: It is shown that the reactions Cu+O, Cu+Ne, Ga+N lead to the formation of a new isotope of Rb, a β^+ emitter of period 24 ± 1 min. emitting a complex γ-radiation of about 150 keV; its mass number is probably 79.

1. Introduction

En étudiant la transmutation du cuivre par le faisceau d'ions oxygène du cyclotron de Saclay, nous avons constaté la présence d'un nucléide radioactif β^+ de période 24 ± 1 minutes présentant les propriétés chimiques du rubidium [1]).

Les réactions

$$\begin{Bmatrix}{}^{65}_{29}\mathrm{Cu}\\ {}^{63}_{29}\mathrm{Cu}\end{Bmatrix}+{}^{16}_{8}\mathrm{O}\rightarrow\begin{Bmatrix}{}^{81-x}_{37}\mathrm{Rb}\\ {}^{79-x}_{37}\mathrm{Rb}\end{Bmatrix}+x\ \text{neutrons}$$

ne peuvent donner naissance qu'à des isotopes du rubidium de masse inférieure à 81; aucun isotope de masse inférieure à 81 n'est signalé dans la littérature; le nucléide observé serait donc un isotope nouveau.

Nous avons voulu nous assurer de l'existence de cet isotope en le formant à partir d'autres réactions, de manière à confirmer ses propriétés chimiques et à obtenir des informations sur ses propriétés radioactives.

Les transmutations suivantes ont été réalisées:

1) A l'aide du grand cyclotron de l'Institut Nobel de Physique de Stockholm, la transmutation du cuivre naturel par les ions oxygène 16 et par les ions néon 20 [2]). Cette dernière réaction s'écrit

$$\begin{Bmatrix}{}^{65}_{29}\mathrm{Cu}\\ {}^{63}_{29}\mathrm{Cu}\end{Bmatrix}+{}^{20}_{10}\mathrm{Ne}\rightarrow\begin{Bmatrix}{}^{83-x}_{37}\mathrm{Rb}\\ {}^{81-x}_{37}\mathrm{Rb}\end{Bmatrix}+2\ \text{protons}+x\ \text{neutrons.}$$

2) Dans le cyclotron de Saclay, la transmutation des isotopes séparés du cuivre, de masses respectives 63 et 65, par les ions oxygène 16; du cuivre naturel par les ions oxygène 16; du gallium naturel par les ions azote 14:

$$\begin{Bmatrix}71\\69\\31\end{Bmatrix}\mathrm{Ga}+{}^{14}_{7}\mathrm{N}\rightarrow\begin{Bmatrix}84-x\\82-x\\37\end{Bmatrix}\mathrm{Rb}+1 \text{ proton}+x \text{ neutrons.}$$

Enfin, la réaction de l'azote sur le cuivre ne pouvant, en aucun cas, donner naissance à des rubidiums, nous avons recherché la formation de "rubidium" dans cette réaction. Le fait de n'en pas trouver apporte une confirmation des propriétés chimiques de l'élément étudié.

2. Méthode Expérimentale

Dans tous les cas, les cibles irradiées étaient traitées chimiquement pour en extraire le rubidium. Le mode opératoire était le suivant: la cible était attaquée par NO_3H en présence de sels de sélénium, arsenic et rubidium. Le rubidium était séparé à l'état de perchlorate en milieu alcoolique, filtré puis remis en solution dans le minimum d'eau. On ajoutait quelques milligrammes de chlorure de fer et de strontium que l'on précipitait successivement par quelques gouttes de NH_4OH et d'une solution diluée de CO_3Na_2. Le précipité était alors filtré et le filtrat traité par quelques gouttes de NaOH, chauffé à l'ébullition pour chasser complètement NH_3 puis rendu HCl $3n$. On ajoutait alors quelques milligrammes de sélénium et d'arsenic à l'état de séléniate et arséniate, traitait par H_2S et filtrait le précipité de sulfures. Le filtrat était concentré, traité par l'alcool, puis par ClO_4H pour précipiter ClO_4Rb.

Ce mode opératoire sépare le rubidium de tous les éléments qui pourraient être présents (c'est-à-dire de nombres atomiques inférieurs à 39) sauf du potassium.

Les sources de "rubidium" obtenues étaient placées entre un compteur de Geiger à fenêtre en bout de 2 mg par cm² et un cristal de INa (Tl), de diamètre 37 mm, de hauteur 25 mm, protégé par un écran de 1 g/cm² d'aluminium pour absorber le rayonnement β, suivi d'un photomultiplicateur associé à un ensemble amplificateur-sélecteur de bandes à 20 canaux. On mesurait ainsi, d'une part, la décroissance β des échantillons, et, d'autre part, l'énergie et la période des rayonnements γ émis.

3. Résultats

Pour la réaction

$$^{65}_{29}\mathrm{Cu}+{}^{16}_{8}\mathrm{O}\rightarrow{}^{81-x}_{37}\mathrm{Rb}+x \text{ neutrons}$$

la courbe de l'activité mesurée au compteur Geiger décroît avec une

période de 24 ± 1 minutes suivie d'une activité résiduelle ayant une période apparente de quelques dizaines d'heures. Dans l'ensemble des mesures au compteur Geiger, on observe aussi une période plus courte de l'ordre de quelques minutes.

La partie gauche de la fig. 1 montre les spectres d'amplitude des raies γ à différentes périodes de la décroissance.

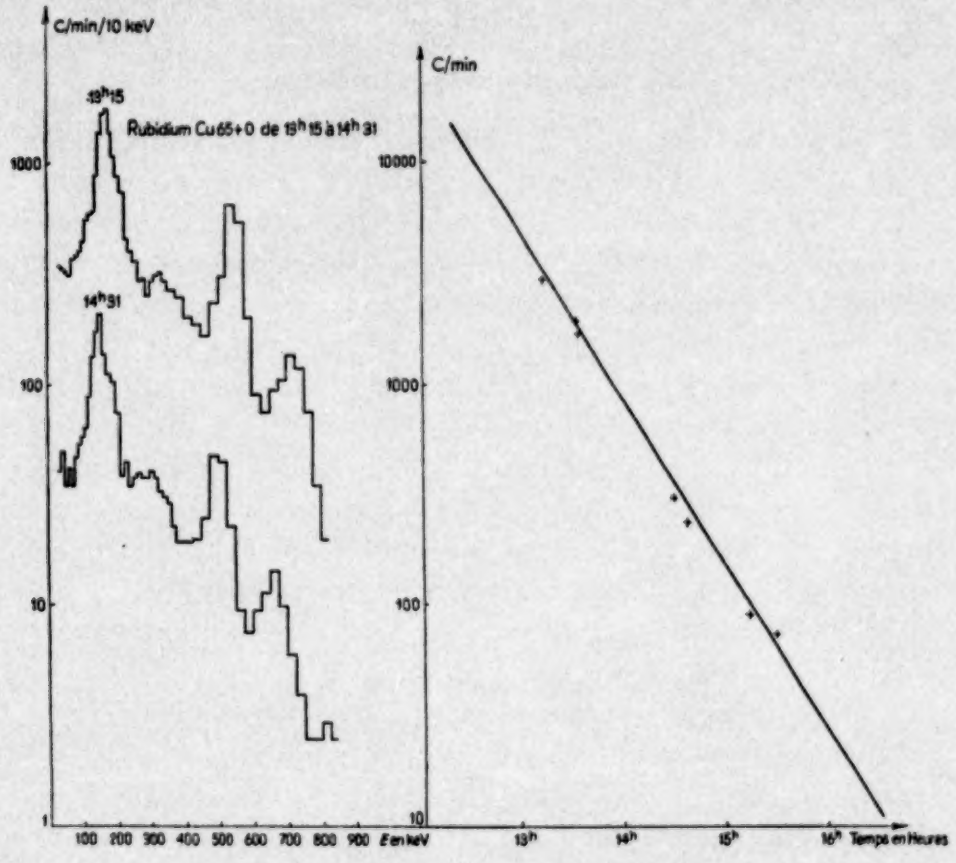

Fig. 1

On peut y remarquer:

1) une raie de 150 ± 10 keV émergeant nettement d'un empilement situé entre 120 et 200 keV dans lequel on peut déceler une raie à 185 ± 10 keV;

2) une raie de 675 ± 25 keV qui peut n'être qu'une raie d'addition par coïncidence de détection de la raie à 511 keV et du groupe entre 120 et 200 keV.

La raie de 150 keV décroît avec une période de 24 ± 2 minutes et paraît simple; la décroissance de sa surface est représentée sur la partie droite de la fig. 2.

La raie de 185 keV aurait une intensité en rapport constant de

l'ordre de 40 % de celle de 150 keV, donc une même période.

La raie de 511 keV est compatible avec une raie d'annihilation de positons; la courbe de décroissance correspondante est homothétique de celle obtenue au compteur Geiger. L'intensité du rayonnement gamma correspondant est égale à 2.5 fois celle du rayonnement de 150 keV.

Après la décroissance principale, on observe un résidu d'activité présentant des raies vers 140 et 260 keV et 400 et 511 keV. Le résidu semble décroître avec quelques dizaines d'heures; l'intensité en est trop faible pour être mesurée avec précision. Elle pourrait être attribuée à ^{79}Kr. On observe les raies principales dans les réactions du cuivre naturel par l'oxygène, ainsi que dans les réactions Ga+N. Dans ce dernier cas, on observe également les raies γ caractéristiques de ^{82}Rb.

4. Discussion

Les observations suivantes permettent d'affirmer que l'activité observée appartient à un isotope du rubidium:

1) Après l'extraction chimique spécifique du rubidium décrite précédemment, on observe une activité si la réaction utilisée permet la formation du rubidium, mais seulement dans ce cas; et par contre, s'il est possible de former des isotopes plus lourds et déjà connus du rubidium, ces isotopes sont effectivement observés.

C'est ainsi que l'on observe cette activité dans les réactions:

Ga+N (où l'on observe aussi le ^{82}Rb de période 6.3 heures),
Cu+Ne (où l'on observe aussi le ^{81}Rb de période 4.2 heures),
^{65}Cu+O, Cu+O,

mais non pas dans la réaction Cu+N qui ne peut conduire à la formation de Rb. Ceci montre que cette activité ne peut être attribuée à une séparation chimique incomplète d'autres éléments, tels que Br, Se ou As, qui sont formés aussi bien dans les réactions Cu+N que dans Cu+O. D'ailleurs, les raies caractéristiques de ces éléments ne se retrouvent pas dans le spectre γ des fractions rubidium.

2) Le potassium peut être présent après extraction chimique mais le seul isotope de période voisine de celle observée est le ^{44}K de période 22 minutes, dont le spectre γ [3]) est différent du spectre observé, et qui est d'ailleurs un émetteur $\beta-$.

5. Essai de Détermination du Nombre de Masse

Dans la réaction

$$^{65}_{29}\mathrm{Cu}+^{16}_{8}\mathrm{O} \rightarrow {}^{79-x}_{37}\mathrm{Rb}+x \text{ neutrons},$$

le nouvel isotope du rubidium est observé avec une abondance égale à celle du ^{75}Br.

Dans la réaction

$$^{63}_{29}\mathrm{Cu}+^{16}_{8}\mathrm{O} \rightarrow {}^{81-x}_{37}\mathrm{Rb}+x \text{ neutrons},$$

cet isotope a une abondance inférieure à 0.75 % du ^{75}Br soit moins de 1/100 de celle observée dans la réaction précédente et l'imperfection de la séparation isotopique des deux cuivres suffit à en rendre compte.

Par ailleurs, les masses $\leqq 77$ sont à exclure pour les raisons suivantes: si le rubidium avait la masse 77, on observerait en filiation le ^{77}Kr de période 1.2 heure que l'on n'a pas trouvé. De même les masses 76, 75 ou 74 auraient dû conduire à des filiations observables.

Les masses possibles restent donc 80, 79 ou 78. La masse 80 est à écarter car la transmutation correspondante de ^{65}Cu se produirait avec l'évaporation d'un seul neutron, ce qui est très peu probable étant donné l'énergie d'excitation disponible. Au contraire, l'évaporation de 2 ou 3 nucléons est un phénomène assez fréquent dans les transmutations provoquées par les ions lourds dans cette région. Les masses 79 ou 78 sont donc les plus vraisemblables. La masse 78 conduirait à un krypton stable, la masse 79 au ^{79}Kr de période 34.5 heures.

La présence de ^{79}Kr (34.5 h) serait compatible avec l'activité résiduelle observée, comme il a été déjà indiqué dans l'analyse des mesures de rayonnement γ, mais la précision des résultats est trop insuffisante pour donner une certitude.

Par ailleurs, le spin prévisible pour ^{79}Rb serait (5/2−) qui favoriserait une transition β au niveau (7/2−) de ^{79}Kr. Ce niveau métastable, de période 55 s [4]), d'énergie 124 keV, pourrait être à l'origine d'une partie du rayonnement γ observé entre 120 et 200 keV. De plus, la systématique β conduit à prévoir une période de l'ordre de 20 minutes pour ^{79}Rb, de l'ordre de 2 minutes pour ^{78}Rb ou ^{80}Rb.

Dans les réactions cuivre-oxygène, on observe également dans les fractions rubidiums une période β, de l'ordre de quelques minutes. Cette activité est trop faible et de trop courte période pour per-

6. Conclusions

Nous pensons donc avoir mis en évidence un nouvel isotope du
mettre une identification précise; il n'est cependant pas exclu qu'il
s'agisse de rubidium 78.
rubidium de période 24 ± 1 minutes, décroissant par β^+, émettant un rayonnement γ complexe vers 150 keV et ayant vraisemblablement la masse 79, la masse 78 n'étant cependant pas complètement exclue.

Cet exemple souligne l'intérêt que présentent les transmutations par ions lourds pour la formation de nucléides nouveaux déficients en neutrons.

Nous remercions les équipes des cyclotrons de Saclay et de Stockholm qui nous ont facilité les irradiations ainsi que Mlles J. Beydon, M. Crut et Mme J. Olkowsky, pour l'aide qu'elles nous ont apportée dans ce travail.

Références

1) J. Beydon, R. Chaminade, M. Crut, H. Faraggi, J. Olkowsky et A. Papineau, J. Phys. Radium **16** (1955) 890
2) H. Atterling, J. Beydon, M. Crut et J. Olkowsky, Nuclear Physics **2** (1956/57) 619
3) B. L. Cohen, Phys. Rev. **94** (1954) 117
4) E. C. Crautz, L. A. Delsasso, R. B. Sutton, M. G. White et W. H. Barkas, Phys. Rev. **58** (1940) 481; **57** (1940) 1087A

NEWS ITEM

INTERNATIONAL CONFERENCE ON NUCLEAR STRUCTURE (REHOVOTH, ISRAEL, 9-13 SEPTEMBER 1957)

An International Conference on Nuclear Structure will be held at the Weizmann Institute of Science, Rehovoth, Israel, under the auspices of the IUPAP from Monday to Friday, September 9—13, 1957.

The tentative program includes the following sessions (one half-day each):

(1) The unified model in theory and experiment.
(2) Shell model evidence in light and heavy nuclei.
(3) Beta decay in theory and experiment.
(4) Electromagnetic transitions in nuclei.
(5) Effects of the finite size of the nucleus.
(6) Extra-nuclear effects on angular correlation.
(7) The measurements of very short life-times.
(8) Instruments of nuclear spectroscopy.
(9) To be decided later.

Each session will comprise two or three main lectures, followed by discussion. Although it is not the intention to have short contributed papers, it is expected that participants will be prepared to comment on relevant points during the discussion periods.

The Organizing Committee is trying to secure funds to assist participants to meet their travel expenses, if necessary. However, as the means at our disposal for this purpose will be strictly limited, those planning to attend are urged to obtain funds, as far as possible, independently.

The more detailed program as well as information regarding travel, hotel accommodation and plans for tours will be circulated before March 1, 1957.

Address all correspondence to A. de Shalit, Conference on Nuclear Structure, Weizmann Institute of Science, Rehovoth, Israel.

H. ATTERLING, J. BEYDON, M. CRUT et J. OLKOWSKY, Transmutation du cuivre par le carbone, l'oxygène et le néon 619

M. CRUT, H. FARAGGI, J. OLKOWSKY et L. ATTERLING, Comparaison des réactions $^{59}Co + {}^{20}Ne$ et $^{63}Cu + {}^{16}O$ . . 624

R. CHAMINADE, M. CROS, I. GRATOT et M. LE PAPE, Mise en évidence d'un isotope léger de rubidium. 634

News Item 640

NOTICE

We have just printed Instructions to Contributors of articles to be published in NUCLEAR PHYSICS. We beg all contributors to consult these instructions before typing their final manuscript.
Copies of these instructions are obtainable free of charge from the publishers or from the members of the editorial board.

Editorial Board

K. B. Adams
E. Amaldi
H. L. Anderson
K. T. Bainbridge
C. J. Bakker
P. R. Bell
R. E. Bell
S. de Benedetti
A. Berthelot
H. Brinkman
G. von Dardel
M. Deutsch
W. Gentner
P. C. Gugelot
H. Halban
O. Haxel
M. de Hemptinne
P. Huber
D. J. Hughes
S. Kikuchi
J. Koch
S. Livingston
E. M. McMillan
P. B. Moon
M. L. Oliphant
W. Paul
A. S. Rao
G. Salvini
P. Savić
P. Scherrer
C. Schmelzer
A. de Shalit
H. W. B. Skinner
R. Tangen
D. Taylor
S. du Toit
O. Wernholm
R. R. Wilson
S. D. Winter

Just out the first issue of

NUCLEAR INSTRUMENTS

A journal on accelerators, instrumentation and techniques in nuclear physics

EDITOR: K. SIEGBAHN
UPPSALA

it contains:

K. SIEGBAHN, Editor's notice

J. B. ADAMS, The CERN symposium 1956 (I)

G. F. VON DARDEL, The CERN symposium 1956 (II)

A. LUNDBY, The CERN symposium 1956 (III)

Proceedings of the CERN symposium 1956

S. COHEN and A. V. CREWE, Regenerative action in high energy accelerators

R. W. P. DREVER, A. MOLJK and S. C. CURRAN, A proportional counter system with small wall effect

D. L. JUDD and S. A. BLUDMAN, Aberrations and fringing effects in a 180° double focusing magnetic spectrometer

R. STOCKENDAL and K. E. BERGKVIST, Evaporation device for beta-spectrometer samples

E. BREITENBERGER, Diverging electrostatic lenses in accelerators

Book Reviews

Nuclear Instruments is published in bi-monthly issues.

Subscription price 130 *sh*; $ 17.00, *postage free.*

NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY AMSTERDAM